

FLUJO EN TUBOS A PRESION

Darío Guaycochea



UAM-AZCAPOTZALCO
Colección Libro de Texto 1992

Rogelio Cruzvillegas
Tecnología prima para T.V.

Darío Guaycochea
Flujo en tubos a presión

Rafael López Rangel
**Problemas metropolitanos
y desarrollo nacional**

Elodino Meléndez
Procesos siderúrgicos

Juan Ramón Prado
**La planeación y el control
de la producción**

Clementina Ramírez
**Tratamiento de aguas
residuales industriales**

Carlos Reynoso Castillo
**Los regímenes laborales
especiales**

Luis Soto Walls
El diseño de lo privado

Mabel Vaca
Raymundo López
Mecánica de fluidos

**FLUJO EN TUBOS
A PRESION**

COLECCION
LIBRO DE TEXTO
1992

217993
C.B. 2893853

DARIO E. GUAYCOCHEA G.



FLUJO EN TUBOS A PRESION



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO.

2893853

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Rector General

Dr. Gustavo A. Chapela Castañares

Secretario General

Dr. Enrique Fernández Fassnacht

UNIDAD AZCAPOTZALCO

Rectora

Dra. Sylvia Ortega Salazar

Secretario

Ing. Enrique Tenorio Guillén

Coordinador de Extensión Universitaria

José Lever

Jefa de la Sección Editorial

Mtra. Silvia Pappe

Cuidado de la edición:

Ma. Emilia González D.

Ma. Eugenia Varela C.

Diseño de la portada

Luisa Martínez

ISBN 970-620-162-9

© 1992 Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo No. 180

Azcapotzalco, México D.F., 02200

Impreso en México

Printed in México

UAW
TC 180
68.3

INDICE DE MATERIAS

Prefacio	9
1. Introducción	11
1.1 Concepto de tubos a presión	13
1.2 Empleo y características técnicas	15
1.3 Ecuaciones de conservación	17
1.3.1 Relaciones integrales para un volumen de control	20
1.3.2 Ecuaciones de conservación para un volumen de control simplificado	21
1.3.3 Ecuaciones de conservación para un tubo a presión circular recto	28
1.3.4 Diagrama de energía	32
Resumen del capítulo	53
Problemas propuestos	54
2. Pérdidas de energía primarias	67
2.1 La fórmula de Darcy–Weisbach y el factor de fricción	69
2.2 Regímenes de flujo	74
2.3 Flujo laminar	79
2.4 Flujo turbulento	86
2.4.1 Ecuación de Coolebrook y White	87
2.4.2 Tubos lisos y rugosos	88
2.4.3 Envejecimiento de la tubería	92
2.5 Diagrama de Moody	96
2.5.1 Empleo del diagrama	100
2.5.2 Formas alternativas del diagrama de Moody	104
2.6 Tubos de sección no circular	114
2.7 Fórmulas empíricas	125
2.7.1 Fórmulas de Hazen–Williams, Scimemi y Manning–Strickler	133
Resumen del capítulo	141
Problemas propuestos	142
3. Pérdidas secundarias. Accesorios en tuberías	146
3.1 Naturaleza física de las pérdidas secundarias	149
3.2 Evaluación de las pérdidas secundarias	151
3.3 Pérdidas en expansiones y salidas	156
3.4 Pérdidas en reducciones y entradas	162
3.5 Pérdidas en codos y curvas	167
3.6 Pérdidas en uniones y bifurcaciones	174
3.7 Pérdidas en válvulas	177
3.7.1 Válvula de compuerta	181
3.7.2 Válvulas de globo, de codo y de aguja	182
3.7.3 Válvulas de mariposa y esférica	188
3.7.4 Válvulas antirretorno	192

3.7.5	Válvulas de aire, de alivio y reductora de presión	195
3.8	Pérdidas por medidores	198
3.9	Otros accesorios	203
3.10	Tendencias modernas en la evaluación del coeficiente K	203
	Resumen del capítulo	219
	Problemas propuestos	220
4.	Tubo sencillo	225
4.1	Cálculo de pérdidas en tubos con accesorios	227
4.2	Importancia relativa de las pérdidas secundarias	234
4.3	Longitudes equivalentes	234
4.4	Cálculo del gasto en tubos con accesorios	243
4.5	Conducciones con bombas y turbinas	250
4.6	Gasto en ruta	254
4.7	Flujo no permanente	258
4.8	Diámetro económico	261
	Resumen del capítulo	264
	Problemas propuestos	265
5.	Tubos en serie y en paralelo	271
5.1	Tubos en serie	273
5.2	Tubos en paralelo	282
5.3	Tubo equivalente	289
5.4	Combinación de tubos en serie y en paralelo	294
	Resumen del capítulo	308
	Problemas propuestos	309
6.	Redes	315
6.1	Elementos componentes de una red de tubos a presión	317
6.2	Sistema de ecuaciones	319
6.2.1	Ecuaciones de tramo	319
6.2.2	Ecuaciones de nudo	322
6.2.3	Ecuaciones de circuito	322
6.3	Planteo del problema	323
6.4	El problema de los tres depósitos	325
6.5	Resolución de redes abiertas	327
6.6	Resolución de redes cerradas. El método de Hardy Cross	341
6.7	Otros métodos de resolución de redes	363
6.7.1	Clasificación de los métodos	363
6.7.2	Técnicas de optimización	367
6.7.3	Análisis comparativo	369
	Resumen del capítulo	371
	Problemas propuestos	372
	Referencias	381

*Al recuerdo de mi venerado padre
D. Virgilio Armando Guaycochea Clevers*

Agradecimientos

Ha sido mucha la gente que me ha ayudado, moral y materialmente, en la realización de este libro. A riesgo de pecar de injusto voy a agradecer a algunos de ellos: A las autoridades de la Universidad Autónoma Metropolitana, por su empeño en promover acciones que como esta, la publicación de libros, estimula a los profesores y beneficia a los alumnos. A las licenciadas *María Emilia González* y *Silvia Pappé*, por su constante y fecunda entrega a la labor editorial. Al Jefe del Departamento de Energía, Ing. *Luis Cabrera Pérez*. A la Encargada del Centro de Cómputo del Departamento de Sistemas, Ing. *Rafaela Blanca Silva*. A mi esposa *Guillermina* y a mi hija *Claudia*, por haber permitido que dedicara a esta tarea parte del tiempo que ellas merecían. Finalmente, mi reconocimiento más profundo es para el ayudante de *TERMOFLUIDOS* Fernando Morales Contreras, estrecho colaborador, a quien auguro un brillante futuro como Ingeniero Ambiental.

D.E.G.G.

PREFACIO

El objetivo general de esta obra es: *Explicar el fundamento y desarrollar habilidades para el cálculo de tubos y de redes de tubos a presión en régimen permanente, principalmente como texto universitario a nivel de licenciatura.* Son abundantes los libros que tratan este tema como un capítulo más de un texto de Mecánica de fluidos, pero pocos los que se refieren a él específicamente. La idea de su elaboración surge de la inquietud de facilitar al alumno un material de estudio claro, completo y didáctico, especialmente para su uso en el curso de Hidráulica de la UAM Azcapotzalco. En efecto este libro cubre la primera parte de ese curso pero también es útil para el de Mecánica de Fluidos, asignatura en la que también se ve el tema de flujos a presión como aplicación de las ecuaciones fundamentales. Siendo ambas materias tomadas por un número importante de alumnos de varias carreras, se ha pensado que el beneficio puede ser importante. Por otro lado este libro será útil también como material de consulta en otros cursos en los que se ocupa el tema, tales como Turbomaquinaria, Instalaciones industriales, Abastecimiento de agua, Instalaciones en edificios, etcétera.

El alumno de Hidráulica podrá encontrar aquí sin dificultad todo lo referente al tema, tanto en el aspecto teórico como en el práctico; pero por otro lado es necesario destacar que esta obra fue concebida como libro y no como apuntes de curso. No es una copia fiel del discurso del profesor, sino que se ha aprovechado para desarrollar algunos temas y presentar variedad de ejemplos con más calma de la que permite el tiempo limitado del que se dispone en la cátedra. Se han incluido además gráficas, tablas y todo tipo de ayudas de cálculo, de manera que pueda ser útil también como manual de consulta.

Si bien muchos de los puntos que aquí se tratan son expuestos en otros libros, se ha buscado darles un ordenamiento más claro y didáctico. Por otro lado se ha puesto gran empeño en lograr una obra actualizada, por lo cual se han incorporado los resultados de trabajos recientes, como lo son el método de las dos K para el cálculo de pérdidas por accesorios, fórmulas para el cálculo de longitudes equivalentes y el análisis de los métodos empleados en la actualidad para el cálculo de redes. También se ha procurado en los ejemplos reproducir problemas reales, con materiales y técnicas empleados en la actualidad.

Desde el punto de vista de su estructura didáctica se han procurado los siguientes aspectos:

- **Explicar los temas con toda claridad a partir de su fundamento físico;** la formación académica de un ingeniero demanda que se conozca la tecnología desde su fundamento y no a partir de *recetas de cocina*. Esto no significa sin embargo que se hagan extensas deducciones matemáticas; al contrario, se ha logrado emplear simplemente conceptos de matemática elemental que no pasan de la resolución de ecuaciones diferenciales por variables separables. Si bien en algunos temas introductorios se requiere del cálculo de varias variables, esto se ha resuelto exponiéndolos por la vía del análisis integral, ya que si bien la derivada es un concepto previo a la integral, el estudiante entendiéndola con mayor facilidad esta última, que no es más que una suma de infinitos términos elementales. Aquellos problemas que no pueden ser resueltos por aplicación de ecuaciones básicas se exponen también con criterio científico, específicamente con aplicación del análisis dimensional.
- **Exponer ordenadamente las metodologías y algoritmos de cálculo;** la mayoría de ellas adaptadas al cálculo manual, algunas al cálculo automático; en lo que respecta a este último caso se ha desdénado la inclusión de programas de cómputo, inclusive de pseudocódigos por considerar que esto diste del objetivo principal del libro; esto queda para el alumno, quien no pocas veces sorprende al profesor por su habilidad para resolver este tipo de problemas.

- **Presentar abundantes y variados problemas resueltos explicados minuciosamente.**
- **Poner a disposición del lector variedad de problemas propuestos.**
- **Emplear una nomenclatura y una simbología ordenadas y lógicas.**

Los capítulos en que se divide el libro son los siguientes:

- **Introducción**, en el que se hace un resumen de los temas de Mecánica de fluidos que sirven de fundamento al cálculo de tubos a presión. El aspecto esencial de este capítulo es que sirve de enlace entre el curso de Hidráulica y su prerrequisito que es Mecánica de fluidos.
- **Pérdidas de energía primarias.**
- **Pérdidas secundarias. Accesorios en tuberías.**
- **Tubo sencillo.**
- **Tubos en serie y en paralelo.**
- **Redes.**

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1. INTRODUCCION

- 1.1 Concepto de tubos a presión.
- 1.2 Empleo y características.
- 1.3 Ecuaciones de conservación.
- 1.3.1 Relaciones integrales para un volumen de control.
- 1.3.2 Ecuaciones de conservación para un volumen de control simplificado.
- 1.3.3 Ecuaciones de conservación para un tubo a presión circular recto.
- 1.3.4 Diagrama de energía.

1.1 Concepto de tubos a presión

Se llama *tubo a presión* o *tubo forzado*, a toda conducción cerrada en la cual el líquido que fluye está sometido a una presión variable (figura 1.1). Por lo tanto, es condición indispensable que el líquido esté aislado físicamente de la atmósfera circundante y que llene completamente el interior de la tubería. Esto es lo que ocurre en la figura 1.2.a; en la 1.2.b, en cambio, el contorno sólido del flujo está abierto a la atmósfera y en la 1.2.c la tubería es cerrada pero el líquido llena sólo parcialmente el conducto; sólo el primer caso entonces, es una conducción a presión; los otros dos son conducciones libres o a *superficie libre*.

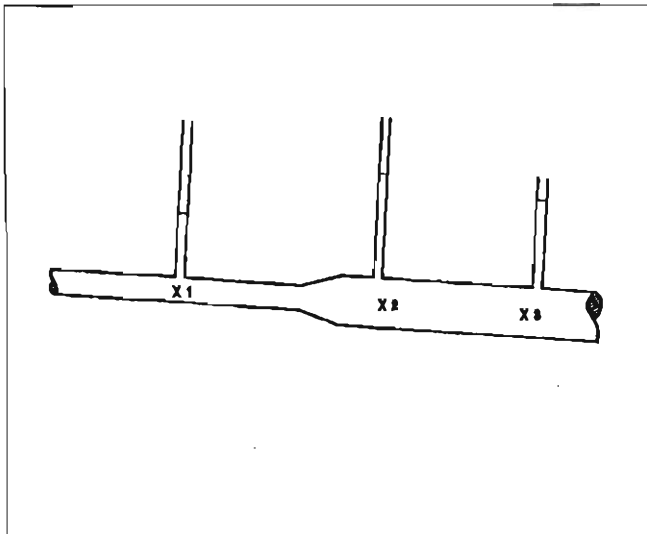


Figura 1.1: Tubo a presión, los manómetros indican las presiones en distintas secciones de la conducción.

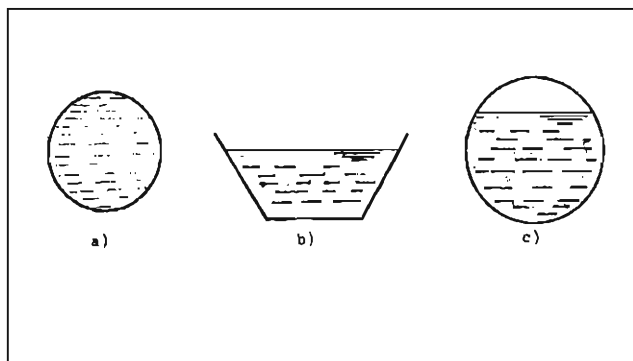


Figura 1.2: a) Tubo a presión. b) Canal abierto. c) Tubo parcialmente lleno (El rayado indica la parte ocupada por el líquido).

Como se verá más adelante, las diferencias de presión en un tubo forzado son capaces de mantener al fluido en movimiento independientemente de que el trazado de la conducción sea horizontal, descendente o ascendente; el flujo inclusive puede ascender verticalmente. Esto representa un marcado contraste con las conducciones libres, en las que la fuerza motriz es exclusivamente la gravedad (figura 1.3)¹.

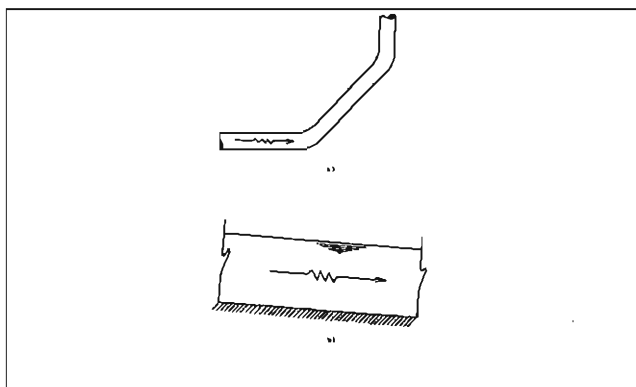


Figura 1.3: a) Tubo a presión con tramos horizontal, inclinado ascendente y vertical ascendente. b) Canal abierto, el flujo es descendente.

El flujo en tubos a presión es básicamente *unidimensional*, ya que las velocidades de las partículas tienen una misma dirección: la del eje de la tubería. No importa que éste tenga cambios de alineación a lo largo de su recorrido; en general basta que en cada sección transversal las velocidades sean paralelas para

¹ En rigor de verdad el flujo en canales también puede tener tramos ascendentes, pero sólo en longitudes muy cortas y en flujo variado.

su enfoque como flujo unidimensional. Esto representa una gran ventaja, ya que el flujo bi o tridimensional requiere un tratamiento analítico mucho más complejo.

En la gran mayoría de las conducciones a presión, la sección del flujo es constante, al menos por tramos, por lo cual la velocidad media será la misma en todas las secciones y esto significa que el flujo es *uniforme* (figura 1.4.a). Cuando esto no ocurre se dice que el flujo es *variado* y un ejemplo práctico de este caso es el tubo de desfogue de las turbinas hidráulicas, cuya sección es creciente (figura 1.4.b).

Otra condición que también se cumple en la enorme mayoría de los casos es que la sección transversal de la tubería es de forma circular, ya que es la que conjuga ventajas de funcionamiento hidráulico y estructural, además de facilidad en su fabricación, manipulación y puesta en obra.

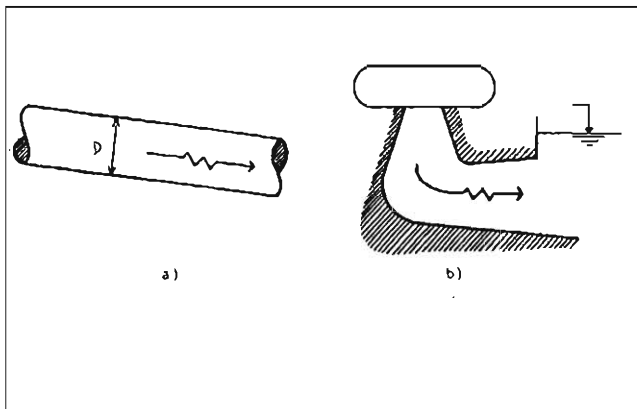


Figura 1.4: a) Tubo de diámetro constante (flujo uniforme). b) Tubo de desfogue de una turbina (Flujo variado).

1.2 Empleo y características técnicas

El tubo a presión es la más difundida de todas las estructuras hidráulicas ya que es la adecuada y ventajosa para la conducción de líquidos en una gran variedad de usos, desde gastos muy pequeños como es el caso de instrumental empleado en medicina y cirugía hasta caudales de gran magnitud como los que se manejan en plantas hidroeléctricas y grandes acueductos. El propio aparato circulatorio del hombre y los animales superiores no es otra cosa que una compleja red de tubos a presión. La siguiente es una lista, seguramente parcial, de usos específicos de este tipo de conducciones:

- Abastecimiento de agua para uso domiciliario e industrial
- Instalaciones sanitarias en edificios
- Conducción de líquidos diversos en plantas industriales
- Extracción de agua de pozos
- Instalaciones de bombeo
- Conducción de agua mediante túneles a presión
- Oleoductos

- Instalaciones para riego a presión (por aspersión y goteo)
- Sistemas de calefacción por agua
- Sistemas de refrigeración en plantas termoeléctricas

También podría agregarse a esta lista las conducciones de gases, como es el caso de los gaseoductos, redes de distribución de gas combustible e instalaciones de aire acondicionado. Sin embargo, en esta obra se tratará específicamente el caso de conducciones de líquidos, particularmente de agua.

Los materiales empleados en la fabricación o construcción de tubos a presión son muy variados. Una lista bastante completa puede consultarse en la tabla 2.1. La selección del material obedece a razones diversas. Desde el punto de vista hidráulico debe procurarse que la tubería tenga una superficie interior lisa, a fin de minimizar la fricción. En lo que hace al aspecto estructural debe buscarse un tubo capaz de resistir los esfuerzos a que se verá sometido (figura 1.5), que básicamente son: la presión interna, que provoca esfuerzos normales en la dirección tangencial, la flexión en el caso de tuberías apoyadas y el aplastamiento en el caso de tuberías enterradas. En cuanto al aspecto constructivo, debe buscarse que la tubería sea liviana, no demasiado frágil a fin de que pueda resistir la manipulación y que sus juntas y accesorios sean fáciles de poner en obra. También deben atenderse otros factores asociados al tipo especial de conducción que se proyecta; por ejemplo, si el líquido es químicamente agresivo deberá buscarse un material resistente a la corrosión, o si aquél es caliente, se necesitará un material capaz de tolerar altas temperaturas.

Tradicionalmente, el *fierro fundido* y el *acero galvanizado* se han empleado para conducciones de agua; sin embargo, con el correr del tiempo han alcanzado amplia difusión otros materiales como el *asbesto-cemento* y el PVC (cloruro de polivinilo); ambos tienen la propiedad de ser muy lisos. El acero sigue siendo de todas maneras, el material más conveniente cuando la presión interna es muy alta, lo cual se observa, por ejemplo, en la descarga de bombas de alta presión o en conducciones de gas licuado. El concreto

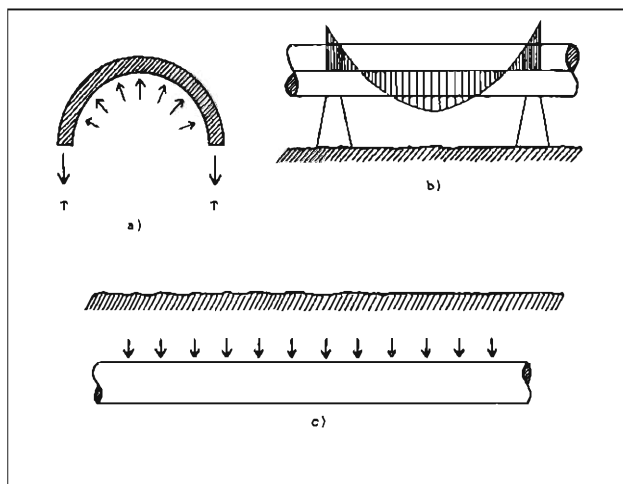


Figura 1.5: Esfuerzos sobre una tubería. a) presión interna. b) flexión (tubo apoyado). c) aplastamiento (tubo enterrado).

reforzado se emplea en tuberías de gran diámetro, especialmente si son construidas *in situ*; también se emplea en estos casos la *placa de acero soldada*.

Los accesorios son piezas especiales que se interponen en la tubería con diversos fines, tales como cambio de dirección de la conducción, control de gasto, bifurcación y control de presiones. Algunos de ellos tienen influencia en el flujo, ya que provocan una disipación de energía debida al cambio forzado de la dirección de las partículas líquidas (esto se discutirá ampliamente en el capítulo 3). Una lista de los principales accesorios en tuberías podría ser la siguiente: juntas, codos, curvas, expansiones, reducciones, uniones, bifurcaciones, válvulas (de compuerta, globo, aguja, esférica, mariposa, antirretorno, ruptoras de vacío, de alivio, reductoras de presión) y medidores de diversos tipos. Generalmente los accesorios son piezas prefabricadas de hierro fundido, acero, bronce o inclusive plástico. Las uniones entre tramos de tubería pueden hacerse de distintas formas; las más comunes son: roscadas, a bridas soldadas, de macho y campana y de anillos exteriores. Todas ellas están diseñadas para asegurar la estanqueidad del fluido, pero no siempre para resistir los esfuerzos de flexión o longitudinales; esto debe tenerse en cuenta para calcular el soporte de la tubería.

1.3 Ecuaciones de conservación

Para proceder al estudio del flujo en tuberías es preciso echar mano de los conceptos básicos de la mecánica de fluidos. No se hará aquí una discusión detallada de los mismos por no ser tema de este libro. Sin embargo, se hará una breve reseña de las ecuaciones de conservación, que son la herramienta fundamental en el análisis del problema².

Cualquier fenómeno dentro de la hidráulica y, en general, dentro de la mecánica, debe satisfacer una serie de principios o leyes fundamentales que se enumeran a continuación:

- a) Conservación de la masa
- b) Conservación de la cantidad de movimiento
- c) Conservación de la energía (1a. ley de la termodinámica)
- d) Segunda ley de la termodinámica

Estos principios básicos son interpretados por un conjunto de ecuaciones que, según el caso en estudio y las hipótesis que puedan aceptarse para el mismo, adquieren formas particulares de gran utilidad práctica. De los cuatro principios mencionados, el último tiene poco interés en hidráulica, puesto que casi siempre se trabaja con líquidos incompresibles y los fenómenos de transferencia de calor carecen de relevancia. Sólo se prestará atención a los tres primeros, por lo cual las ecuaciones correspondientes se llamarán *ecuaciones de conservación*.

Las ecuaciones de conservación pueden expresarse en su forma diferencial o en forma integral, lo cual condicionará el tratamiento matemático que se emplee en su análisis. Aquí se optará por el segundo camino; para ello es necesario suponer un conjunto continuo de partículas fluidas, que recibe el nombre de *sistema* (figura 1.6), al cual se aplicarán las mencionadas ecuaciones.

² Información más detallada sobre temas básicos de mecánica de fluidos puede consultarse en las referencias (1), (2), (3), (4), (5) ó (6).

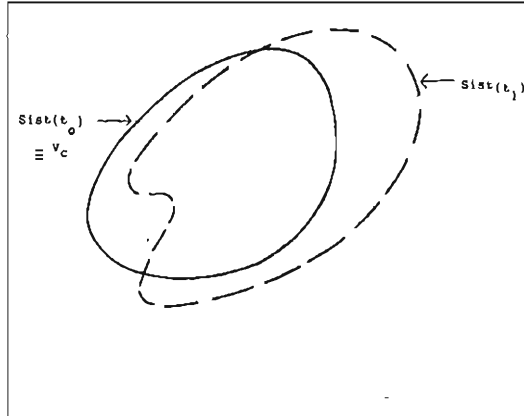


Figura 1.6: Sistema y volumen de control: El sistema ocupa el volumen de control v_c en el instante t_0 pero ocupa otra posición en el instante t_1 .

- a) El principio de *conservación de la masa*, llamado también en mecánica de fluidos *ley de continuidad*, expresa que la masa del sistema es constante. Una partícula, y por extensión un sistema, puede manifestar cambios en muchas de sus propiedades como consecuencia de cargas externas, pero la masa permanece invariable, independiente del tiempo y de cualquier acción que afecte al sistema³. Matemáticamente este principio se expresa

$$m_{\text{sist}} = \text{constante}$$

o bien

$$\frac{d}{dt} m_{\text{sist}} = 0 \quad (1.1)$$

Esto es: la variación en el tiempo de la masa del sistema es nula.

- b) El principio de *conservación de la cantidad de movimiento* o de conservación del *momentum*, es una forma de presentar la segunda ley de Newton cuya expresión para una partícula es la conocida fórmula: fuerza = masa x aceleración. Para un sistema continuo de partículas se requieren dos ecuaciones vectoriales:

³ Naturalmente que esto es cierto en el marco de la mecánica newtoniana, donde no se tiene en cuenta el fenómeno de la relatividad.

- b.1) La primera es la ecuación de *conservación de la cantidad de movimiento lineal*, y dice que el impulso de las fuerzas exteriores aplicadas sobre el sistema es igual al aumento de su cantidad de movimiento. Esto es:

$$\left(\sum_{sist} \bar{F} \right) dt = d \left(\overline{m V} \right)_{sist} \quad (1.2)$$

O bien

$$\sum_{sist} \bar{F} = \frac{d \left(\overline{m V} \right)_{sist}}{dt} \quad (1.3)$$

En la expresión anterior, el símbolo $\left(\overline{m V} \right)_{sist}$ representa la cantidad de movimiento del sistema y por lo tanto es la suma de las cantidades de movimiento de las partículas que lo componen:

$$\left(\overline{m V} \right)_{sist} = \iiint_{sist} \bar{V} \, dm \quad (1.4)$$

Donde \bar{V} es la velocidad de cada partícula y dm su masa.

- b.2) La ecuación de *conservación de la cantidad de movimiento angular* es análoga a la anterior y dice que el impulso de los momentos exteriores aplicados al sistema es igual al incremento de su cantidad de movimiento angular

$$\left(\sum_{sist} \bar{M}_o \right) dt = \bar{H}_{sist} \quad (1.5)$$

O bien

$$\sum_{sist} \bar{M}_o = \frac{d \bar{H}_{sist}}{dt} \quad (1.6)$$

donde \bar{H}_{sist} es la cantidad de movimiento angular del sistema

$$\bar{H}_{sist} = m \left(\bar{r}_o \times \bar{V} \right)_{sist} = \iiint_{sist} \left(\bar{r}_o \times \bar{V} \right) dm \quad (1.7)$$

El subíndice o representa el punto con respecto al cual toman los momentos \bar{M}_o y los radios vectores \bar{r}_o .

- c) Por último, el principio de *conservación de la energía* expresa que todo trabajo o calor que el sistema recibe se almacena en éste en forma de energía

$$dW_{al\ sist} + dQ_{al\ sist} = dE_{sist} \quad (1.8)$$

En hidráulica el término dQ (calor agregado al sistema) no tiene relevancia, de manera que se aceptará que

$$dW = dE \quad (1.9)$$

O bien

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} \quad (1.10)$$

1.3.1 Relaciones integrales para un volumen de control

En la mecánica de los medios continuos resulta generalmente incómodo analizar el movimiento de un sistema de partículas, ya que éste ocupa sucesivamente distintas posiciones en el espacio, y además, como no todas las partículas tienen la misma velocidad, el sistema se deforma, haciendo aún más difícil su estudio. Por eso es que resulta de especial interés la introducción del concepto de *volumen de control* (figura 1.6), el que se define sencillamente como una región del espacio, cuyo objetivo es estudiar el movimiento de los sistemas de partículas que sucesivamente van ocupando esa posición. No es necesario que el volumen de control sea fijo y rígido; en su forma más general será móvil y además deformable. A la frontera del volumen de control, o sea a la superficie que lo separa del resto del espacio, se le llama *superficie de control*.

Ahora bien, para proceder al estudio del flujo, que es el objetivo perseguido, es necesario expresar las ecuaciones de conservación de manera que resulten válidas para un volumen de control, lo cual no es inmediato ya que lo que es válido para un sistema, no necesariamente lo es para un volumen de control; por ejemplo, si el volumen de control V_c de la figura 1.6 es ocupado por partículas cada vez más livianas, no será cierto que su masa sea constante. El problema planteado puede resolverse mediante el teorema del transporte de Reynolds, el cual demuestra la validez de la siguiente ecuación integral:

$$\frac{d}{dt}(B_{sist}) = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{V_c} b \, p \, dV \right) + \iint_{sc} b \, p \, (\bar{V}_r \cdot \hat{n}) \, dA \quad (1.11)$$

En esta ecuación, el símbolo B representa una *propiedad extensiva* del sistema, que puede ser la masa, energía, peso, etc. y b representa su respectiva *propiedad intensiva*; esto es: si dB es el valor de B para una partícula de masa dm , entonces $b = dB / dm$. El símbolo \bar{V}_r representa la velocidad relativa de la partícula respecto del volumen de control; si éste es fijo entonces $\bar{V}_r = \bar{V}$ (velocidad absoluta); finalmente, p es la densidad del fluido, dV es un diferencial del volumen, dA es un diferencial de área y \hat{n} es un vector unitario normal al área, el cual convencionalmente apunta hacia afuera del volumen de control.

No se hará aquí un análisis exhaustivo de esta ecuación (el cual puede verse en el capítulo 3 de la referencia [1]). Sin embargo, con un poco de esfuerzo el lector podrá entender el significado físico de la misma, que es el siguiente: la variación respecto del tiempo de la propiedad B en el sistema (1er. miembro), es igual a la variación temporal de la misma propiedad en el volumen de control (1er. término del segundo miembro) más el *flujo* de B a través de la superficie de control (esto es, la parte de B que sale, menos la parte que entra a V_c en el intervalo dt y que ocupa el 2do. término del 2do. miembro).

a) Si B es, por ejemplo, la masa m del sistema, entonces $b = dB/dm$ será igual a la unidad; reemplazando estos valores en la 1.11 se obtiene:

$$\frac{d}{dt} m_{sist} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{vc} p \, dV \right) + \iint_{sc} p \left(\bar{V}_r \cdot \hat{n} \right) dA$$

si ahora se compara esta ecuación con la 1.1 se verá que esta expresión es a su vez igual a cero

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{vc} p \, dV \right) + \iint_{sc} p \left(\bar{V}_r \cdot \hat{n} \right) dA = 0 \quad (1.12)$$

que es la *ecuación integral de la conservación de la masa* para un volumen de control. Procediendo de manera similar se obtienen expresiones análogas de las demás ecuaciones

b.1) Si $B = m \bar{V}$, entonces $b = dB/dm = \bar{V}$; reemplazando en la (1.11) y combinando con la 1.3)

$$\sum \bar{F} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{vc} \bar{V} p \, dV \right) + \iint_{sc} \bar{V} p \left(\bar{V}_r \cdot \hat{n} \right) dA \quad (1.13)$$

ecuación integral de la conservación de la cantidad de movimiento lineal para un volumen de control. Ahora $\sum \bar{F}$ será la suma de las fuerzas aplicadas sobre el volumen de control.

b.2) Si $B = \bar{H}$, entonces $b = dB/dm = (\bar{r}_0 \times \bar{V})$; reemplazando en la (1.11) y combinando con la (1.6)

$$\sum \bar{M}_o = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{vc} \bar{r}_o \times \bar{V} p \, dV \right) + \iint_{sc} (\bar{r}_o \times \bar{V}) p \left(\bar{V}_r \cdot \hat{n} \right) dA \quad (1.14)$$

ecuación integral de la conservación de la cantidad de movimiento angular para un volumen de control.

c) Finalmente, si $B = E$, entonces $b = dB/dm = e$ (energía por unidad de masa); reemplazando en la (1.11) y combinado con la (1.10).

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{vc} e \, dV \right) + \iint_{sc} e p \left(\bar{V}_r \cdot \hat{n} \right) dA \quad (1.15)$$

ecuación integral de la conservación de la energía para un volumen de control.

1.3.2 Ecuaciones de conservación para un volumen de control simplificado

Las expresiones (1.12) a (1.15) no pueden integrarse en forma sencilla a menos que se hagan algunas simplificaciones. Afortunadamente, en la mayoría de los problemas de hidráulica y en particular para el

caso de tubos a presión, pueden admitirse las siguientes hipótesis que reducen notablemente la complejidad del problema:

- i) El fluido es incompresible: $p = \text{constante}$
- ii) El flujo es permanente: la variación de la velocidad (y de cualquier variable del flujo) en cada punto del volumen de control es nula con respecto al tiempo.
- iii) El volumen de control es rígido y fijo.
- iv) El volumen de control tiene una sola entrada y una sola salida normales al flujo.

En estas condiciones el volumen de control será como el de la figura 1.7.

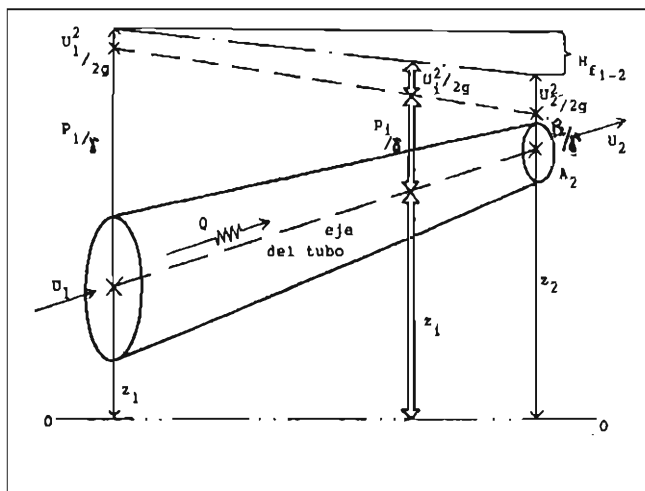


Figura 1.7: Volumen de control simplificado.

Las ecuaciones de conservación adoptan para estas hipótesis las formas que se presentan a continuación (no se incluyen aquí las demostraciones, las cuales pueden consultarse en la referencia [1]).

a) Conservación de la masa (continuidad)

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 \quad (1.16)$$

Se hará aquí un breve comentario para explicar el significado de la velocidad media U . En cada punto del campo de flujo existe una velocidad puntual que se simbolizará V . La distribución de V en general no es uniforme sobre la sección transversal al flujo (A_1 o A_2 en este caso), como se muestra por ejemplo en las figuras 2.8 y 2.10.a. La velocidad media de *flujo* U es precisamente el promedio de dichas velocidades en la sección

$$U = \frac{A}{A} \int_A V \, dA = \frac{Q}{A} \quad , \text{ siendo } Q \text{ el gasto.}$$

b) Conservación de la cantidad de movimiento lineal

$$\sum \bar{F} = p \ Q \left(\beta_2 \bar{U}_2 - \beta_1 \bar{U}_1 \right) \quad (1.17)$$

Esta ecuación, al igual que la que sigue, es vectorial, por lo cual, para su aplicación, debe descomponerse en las tres direcciones del espacio. El factor β , llamado coeficiente de Boussinesq, tiene en cuenta la corrección que es necesario aplicar para expresar los términos entre paréntesis empleando la velocidad media U . Su valor se calcula en función de la distribución de velocidades en la sección:

$$\beta = \frac{\int_A V^2 dA}{U^2 A} \quad (1.18)$$

Para el caso de tuberías de sección circular, β asume los siguientes valores:

régimen laminar	$\beta = 1.33$
régimen turbulento	$\beta \cong 1.01$

De modo que, afortunadamente, para el flujo turbulento β puede considerarse igual a 1; no ocurre lo mismo en el laminar pero en este caso casi siempre las velocidades son muy bajas, por lo cual todo el paréntesis de la (1.17) puede prácticamente despreciarse. De manera que puede aceptarse en general que

$$\sum \bar{F} = p \ Q \left(\bar{U}_2 - \bar{U}_1 \right) \quad (1.19)$$

b.1) Conservación de la cantidad de movimiento angular

$$\sum \bar{M}_o = p \ Q \left(\beta_2 \bar{r}_{o2} \times \bar{U}_2 - \beta_1 \bar{r}_{o1} \times \bar{U}_1 \right) \quad (1.20)$$

o bien, admitiendo que $\beta_1 = \beta_2 \cong 1$

$$\sum \bar{M} = p \ Q \left(\bar{r}_{o2} \times \bar{U}_2 - \bar{r}_{o1} \times \bar{U}_1 \right) \quad (1.21)$$

c) Conservación de la energía

$$\left[z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} \right] - \left[z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} \right] = H_f - H_s \quad (1.22)$$

La forma de esta ecuación es completamente distinta a la (1.15), por lo cual se requiere explicar el significado de cada término (ver figura 1.7).

z : es la elevación de la sección (A_1 o A_2 en este caso) con respecto a un plano horizontal de referencia (que se indica como 0-0 en la figura). La posición de este plano es arbitraria; en ocasiones se adopta el nivel medio del mar, pero no necesariamente.

p/γ es la presión en cada sección dividida por el peso específico del líquido.

Obsérvese que la dimensión física de estos términos no es de energía, sino de longitud (en efecto $[z] = L$ y $[p/\gamma] = \frac{F/L^2}{F/L^3} = L$). La explicación es que la ecuación está expresada en términos de *energía por unidad de peso*; el término z resulta de dividir la *energía potencial de posición* (o *energía potencial geodésica*) por el peso del líquido:

$$\frac{E_z}{W} = \frac{m g z}{m g} = z$$

el término p/γ es también una energía potencial, que aquí se llamará *energía potencial de presión*. En efecto, la presión es una forma de acumular energía (si se infla un globo, el aire a presión en su interior posee una energía que puede transformarse en cinética si el globo se poncha o se abre)

$$\frac{E_p}{W} = \frac{p V}{m g} = \frac{p}{\gamma}$$

a $U^2/2g$, el tercer término entre paréntesis, es la energía cinética, también por unidad de peso.

$$\frac{E_c}{W} = \frac{\frac{m V^2}{2}}{m g} = \frac{V^2}{2g}$$

El coeficiente α tiene un significado análogo a β , recibe el nombre específico de coeficiente de Coriolis y tiene en cuenta la corrección necesaria para expresar la energía cinética en función de la velocidad media. Por definición, es

$$\alpha = \frac{\int_A V^3 dA}{U^3 A} \quad (1.23)$$

Para tuberías circulares es:

en régimen laminar	$\alpha = 2$
en régimen turbulento	$\alpha \approx 1.05$

Son válidas las mismas observaciones hechas para el coeficiente β (ver más atrás)⁴ de manera que podrá admitirse que

$$\left(z_1 + \frac{P_1^2}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right) = H_f - H_s \quad (1.24)$$

A la suma de los tres términos entre paréntesis se le llama *energía mecánica total* o, más efectivamente, *energía hidráulica* o *carga hidráulica*. A la suma parcial $(z + P/\gamma)$ se le suele llamar *energía piezométrica* o *energía motriz*, mientras que a $(P/\gamma + U^2/2g)$ se la designa en algunos libros como *presión total*, en cuyo caso a P/γ se le llama *presión estática* y a $U^2/2g$, *presión dinámica*. Por último, habría que referirse a los términos del segundo miembro.

H_f es la *pérdida de energía* en forma de calor por unidad de peso, entre las secciones 1 y 2; se le llama también *pérdida de carga*, *caída de energía* o simplemente *pérdida*. A su vez comprende dos términos

$$H_f = h_f + h_a \quad (1.25)$$

h_f : se llama *pérdidas primarias*, *pérdidas por fricción* o *pérdidas mayores*, y se producen por rozamiento de las partículas líquidas entre sí o bien entre éstas y el contorno sólido a lo largo de la tubería.

h_a : se llama *pérdidas secundarias*, *pérdidas de forma*, *pérdidas localizadas* o *pérdidas menores*, y se producen por singularidades en la tubería; básicamente accesorios de diverso tipo que provocan cambios bruscos en la dirección de las trayectorias líquidas.

H_s : por último es la *energía transferida* al (o del) líquido *por una máquina hidráulica* entre las secciones 1 y 2; será positiva en el caso de una bomba que adiciona energía al líquido y negativa en el caso de una turbina que absorbe energía hidráulica para transformarla en energía mecánica de un sólido de rotación; obsérvese que en este segundo caso el líquido pierde energía, pero no en forma de calor como en el caso de H_f sino en trabajo aprovechable.

Es conveniente hacer, además, los siguientes comentarios:

- Ya se ha dicho que z es la elevación de cada sección, pero ¿de qué punto de ella exactamente?. Convencionalmente z alcanza hasta el centroide de cada sección, pero también la presión p debe tomarse en ese punto. Se insiste en que esto es convencional porque en definitiva la energía piezométrica $(z + P/\gamma)$ toma el mismo valor cualquiera que sea el punto de la sección en el que se lean ambos términos. Esto se debe a que la distribución de presiones a lo largo de la sección es hidrostática, esto es: $z + P/\gamma$ es constante a lo largo de A_1 y de A_2 (figura 1.8.a). Sin embargo esto impone la necesidad de agregar una nueva hipótesis a las ya citadas i) a iv).

⁴ La influencia de los coeficientes α y β puede despreciarse en la mayoría de los problemas de hidráulica: un ejemplo en el que sí conviene computarlos podría ser el de un canal en el que la distribución transversal de velocidades sea muy irregular.

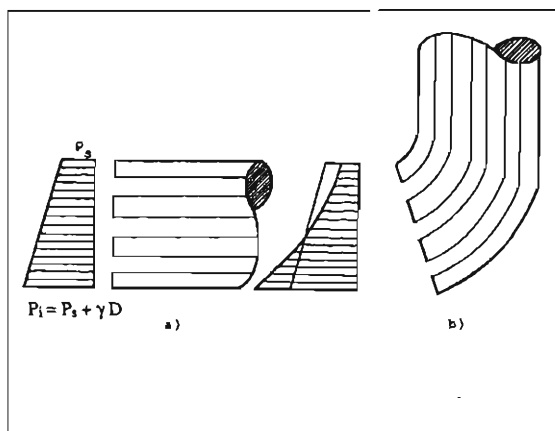


Figura 1.8: a) Flujo rectilíneo: la distribución de presiones en una sección normal al flujo, es la hidrostática. b) la curvatura distorsiona el perfil de presiones.

- v) En la entrada y salida al volumen de control, las trayectorias líquidas son rectas (o bien su velocidad es muy pequeña o su curvatura despreciable).

En efecto, si en cualquiera de estas dos secciones existe una curvatura apreciable, entonces la acción centrífuga distorsionará la distribución hidrostática de presiones (figura 1.8.b), la presión será mayor en el lado convexo de la curvatura y menor en el lado cóncavo. De todos modos, la hipótesis v) es necesaria sólo en las secciones extremas del volumen de control, las secciones intermedias pueden tener curvatura sin que deje de cumplirse la (1.24).

Otra observación interesante es con respecto al signo de los términos: z puede ser positivo o negativo, dependiendo de la elevación del plano de referencia 0-0; como este plano es arbitrario, en general convendrá elegirlo de manera que z sea siempre positivo. γ puede ser positivo o negativo si la presión p es relativa, o sea referida a la presión atmosférica local, pero será siempre positivo si la presión es absoluta, o sea referida al cero absoluto (para evitar confusiones, en adelante se empleará el símbolo p para presión relativa y p^* para absoluta). En general, siempre conviene trabajar con presiones relativas. U_g^2 y H_f serán siempre positivos. H_s , como se ha dicho, puede ser positivo o negativo.

Si no existe máquina que produzca el término H_s y además las pérdidas entre 1) y 2) son despreciables, entonces la (1.24) adopta la forma

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \quad (1.26)$$

Esta expresión tiene nombre propio, se llama *ecuación de Bernoulli* y para que sea válida con suficiente aproximación es necesario que:

- La longitud de la conducción no sea demasiado larga comparada con sus dimensiones transversales (medidas hasta el contorno sólido) y que
- el flujo sea uniforme, convergente, o bien divergente pero de divergencia suave.

La primera de estas dos razones tiene por objeto que la pérdida por fricción h_f sea despreciable. La segunda se refiere a lo siguiente: cuando el flujo es uniforme, la velocidad y por lo tanto su energía cinética, permanecen constantes (figura 1.9.a); cuando es convergente la velocidad aumenta por la ley de continuidad, y aumenta la energía cinética a expensas de la energía de presión (figura 1.9.b); finalmente, cuando es divergente ocurre lo contrario, la velocidad disminuye y se produce una transformación de energía cinética en potencial; si la divergencia es brusca (figura 1.9.c), se observa un fenómeno conocido como *separación*, esto es: las trayectorias líquidas extremas se separan del contorno sólido, lo cual genera una pérdida de energía que se explicará con más detalle en el capítulo 3; sólo si la divergencia es suave (figura 1.9.d) puede evitarse este problema. Esto viene a confirmar algo que es generalizado en la mecánica: que la transformación de energía cinética en potencial siempre es más difícil que la inversa.

Existe una serie de problemas clásicos en la mecánica de fluidos que pueden resolverse por aplicación de la ecuación (o teorema) de Bernoulli, como lo son: el tubo Venturi, el tubo Pitot, el sifón y la ley de descarga de orificios y vertedores.

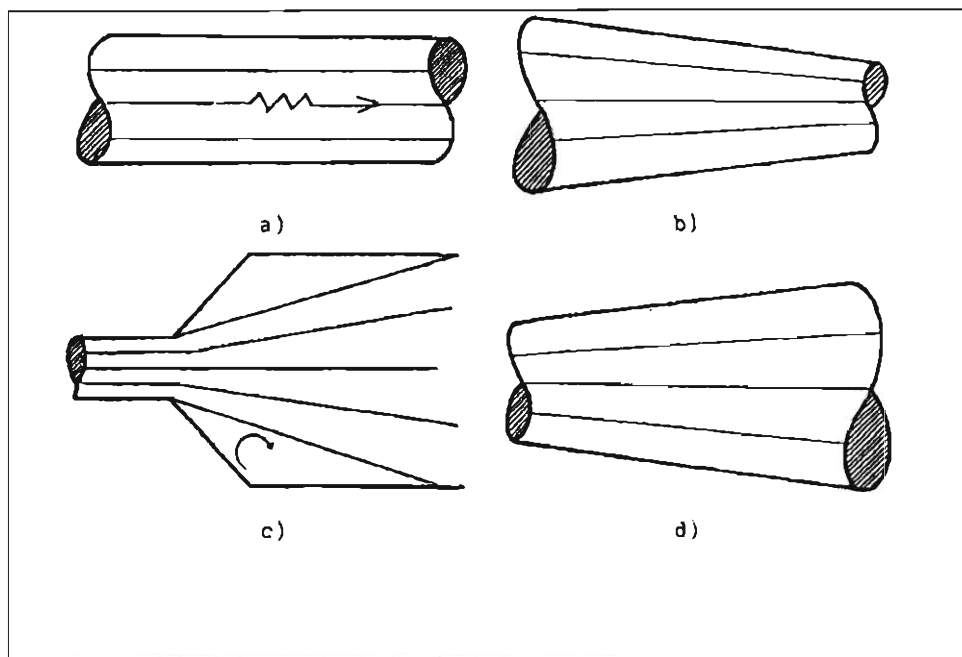


Figura 1.9: a) Tubo uniforme. b) Tubo convergente. c) Tubo bruscamente divergente. d) Tubo gradualmente divergente.

1.3.3 Ecuaciones de conservación para un tubo a presión circular recto

Son pocos los comentarios que habría que agregar para referir las ecuaciones de conservación al caso de tuberías a presión, pero algunas conclusiones interesantes se pueden extraer si se analiza un volumen de control como el de la figura 1.10, cuyas hipótesis son las mismas i a v , que se mencionan en el apartado anterior, a las cuales deben agregarse las siguientes:

- vi) La sección transversal es circular de diámetro constante.
- vii) El eje de la tubería es recto.

En términos prácticos, se trata de un tubo circular recto sin accesorios. En casos como este, independientemente de considerar las coordenadas ortogonales x , y , z , convendrá emplear coordenadas cilíndricas, éstas son: la del eje del tubo, l ; la del radio del mismo, r ; y una coordenada angular ϕ (ver sección transversal en la misma figura 1.10); sin embargo, ésta última rara vez se usa porque el fenómeno goza de simetría radial.

a) Conservación de la masa

La sección transversal es constante y su área es igual a la de un círculo de diámetro D ; por lo tanto $U_1 = U_2 = U$ y además

$$Q = U A = U \frac{\pi D^2}{4} \quad (1.27)$$

$$U = \frac{4 Q}{\pi D^2} \quad (1.28)$$

b) Conservación de la cantidad de movimiento

$$\sum \bar{F} = p Q (\bar{U}_2 - \bar{U}_1)$$

pero \bar{U}_2 y \bar{U}_1 tienen la misma dirección y sentido opuesto, por lo tanto

$$\sum \bar{F} = 0 \quad (1.29)$$

Las fuerzas actuantes sobre este volumen de control son los empujes hidrostáticos sobre las caras extremas $p_1 A_1$ y $p_2 A_2$, el peso W y la fuerza F_c , que aplica el contorno sólido sobre el líquido

$$\overline{p_1 A_1} + \overline{p_2 A_2} + \bar{W} + \bar{F}_c = 0 \quad (1.30)$$

c) Conservación de la energía

En este caso, por ser $U_1 = U_2$ y por existir sólo pérdidas primarias, la (1.24) se reduce a

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) = h_f \quad (1.31)$$

A continuación, se considerará la componente de la (1.30) sobre la coordenada longitudinal l . Al respecto, debe tenerse en cuenta que:

- Los empujes $\overline{p_1 A_1}$ y $\overline{p_2 A_2}$ tienen exactamente la dirección l , el primero con sentido positivo y el segundo negativo.
- La componente del peso \overline{W} sobre l es $W \sen \theta$.
- La fuerza $\overline{F_c}$, aplicada por el contorno sólido sobre la superficie lateral A_l , tiene dos componentes, una normal F_{c_n} y otra tangencial F_τ ; ésta última es la que actúa sobre el eje l y con sentido negativo porque se opone al flujo.

La ecuación resultante es:

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + W \sen \theta - F_\tau = 0 \quad (1.32)$$

Por razones de simetría, el esfuerzo cortante τ_o que actúa a nivel del contorno sólido es constante a lo largo de la superficie A_l , de manera que podrá escribirse:

$$F_\tau = \tau_o A_l$$

Como A_l es una superficie cilíndrica de diámetro D y longitud L , resulta

$$F_\tau = \tau_o \pi D L \quad (1.33)$$

El peso W es igual al volumen cilíndrico por el peso específico del líquido

$$W = \frac{\pi D^2}{4} L \gamma \quad (1.34)$$

Reemplazando la 1.33 y la 1.34 en la 1.32 y considerando que $A_1 = A_2 = \pi D^2/4$, resulta

$$\left(P_1 P_2 \right) \frac{\pi D^2}{4} + \frac{\pi D^2}{4} L \gamma \sen \theta - \tau_o \pi D L = 0$$

Veáse que $L \sen \theta = z_1 - z_2$ (ver detalle en el ángulo superior derecho de la figura 1.10); reemplazando esta ecuación en la anterior y reagrupando términos, resulta

$$\left(\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} + z_1 - z_2 \right) \gamma \frac{\pi D^2}{4} - \tau_o \pi D L = 0$$

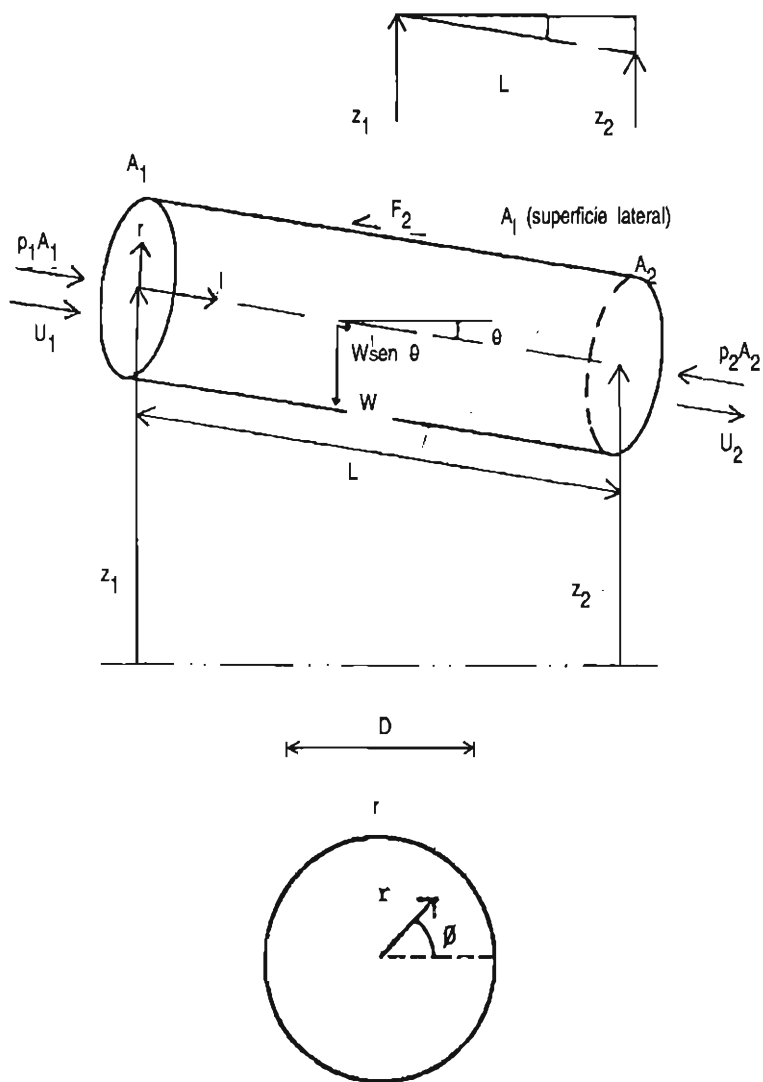


Figura 1.10: Segmento de tubo circular recto; se incluye detalle de la sección transversal con coordenadas radial y angular.

Despejando τ_o

$$\tau_o = \left[\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \right] \gamma \frac{D}{4} \frac{1}{L}$$

Reemplazando la 1.31 en la anterior

$$\tau_o = \frac{h_f}{L} \gamma \frac{D}{4} \quad (1.35)$$

La cantidad $\frac{h_f}{L}$ es la pérdida de energía por unidad de longitud o *pérdida de energía unitaria*

$$S_f = \frac{h_f}{L} \quad (1.36)$$

Analizando la figura se puede observar que S_f es una constante cualquiera sea la longitud L que se considere. En efecto, esto es cierto por una cuestión de simetría: a iguales longitudes habrá iguales pérdidas o, dicho de otro modo:

$$\frac{h_f}{L} \text{ es proporcional a } L$$

Reemplazando la 1.36 en la 1.35

$$\tau_o = \gamma S_f \frac{D}{4} \quad (1.37)$$

Esta ecuación evalúa el esfuerzo de corte en el contorno del flujo en función del peso específico del fluido, la pérdida de energía y el diámetro del tubo.

Una última conclusión se obtendrá si se considera un cilindro de radio r , concéntrico con el eje de la tubería; r es un radio menor que el del tubo ($r < R = D/2$), (ver figura 1.11). La diferencia es que el nuevo volumen de control no está rodeado por un sólido, sino por más líquido; sin embargo, si las trayectorias son paralelas, no habrá flujo a través de la superficie lateral; por lo tanto, las ecuaciones podrán aplicarse en forma análoga y la 1.37 tendrá ahora la forma

$$\tau = \gamma S_f \frac{r}{2} \quad (1.38)$$

τ representa el esfuerzo de corte a un nivel r cualquiera, y de acuerdo con esta ecuación, su distribución es lineal, como se representa en la figura 1.12.

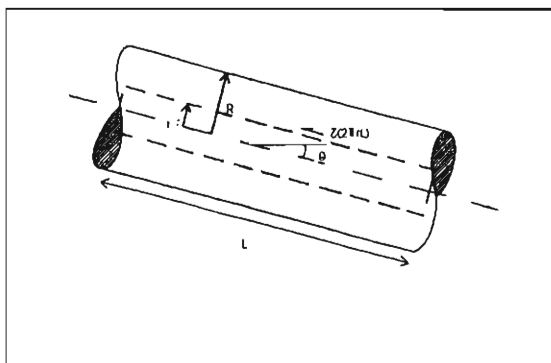


Figura 1.11: Volumen de control formado por un cilindro concéntrico de radio r interior a la tubería.

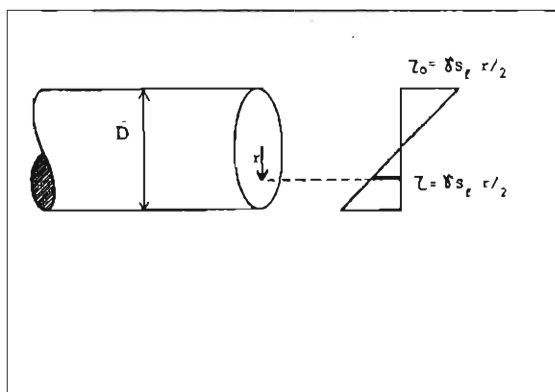


Figura 1.12: Perfil de esfuerzos cortantes en la sección transversal de un tubo a presión.

1.3.4 Diagrama de energía

El hecho de que los términos de la ecuación de la energía sean equivalentes a longitudes, facilita su representación gráfica. En la figura 1.7, por ejemplo, se han representado, como segmentos verticales, los términos z , p/γ y $U^2/2g$ de las secciones extremas 1 y 2 del volumen de control. Pero también en el mismo diagrama es fácil representar estos mismos términos para las secciones intermedias (al menos para aquellas en las que es válida la hipótesis v del apartado anterior), como se hace en la sección i de la misma figura. De esta manera se pueden trazar líneas que unan los extremos de los segmentos z , p/γ y $U^2/2g$ a lo largo de todo el tramo en estudio; la gráfica así resultante se llama *diagrama de energía* y está formada por cuatro líneas:

- El eje de referencia horizontal (línea de raya y doble punto);
- la línea centroidal o baricéntrica de la tubería, llamada *línea geodésica* porque representa precisamente la energía geodésica z (línea de guiones anchos);
- la *línea de energía motriz* o *línea piezométrica*, que representa la suma $z + p/\gamma$ (línea de guiones cortos);
- y la *línea de energía mecánica total* o simplemente *línea de energía*, que representa la suma de los tres términos (línea de raya y punto).

Este diagrama facilita la visualización de los cambios de energía que se producen a lo largo del flujo, especialmente las pérdidas, que están representadas por el descenso de la línea de energía total (H_{1-2} en el caso de la figura).

En la figura 1.13 se representa el diagrama de energía de una conducción a presión, en la que se ha procurado incluir dispositivos y situaciones que hacen que el ejemplo sea bastante completo. La tubería en cuestión conduce agua del tanque T_0 al T_u es conveniente aclarar que en este caso, como en la mayoría, la figura se representa con escalas distorsionadas; por ejemplo, es posible que en la realidad el diámetro D_{1-2} valga 15 cm, la altura $z_2 = 8$ m y la longitud $L_{1-2} = 700$ m; evidentemente, estas proporciones no se guardan en la figura, ya que si así fuera, el dibujo sería extremadamente largo y delgado. Sin embargo,

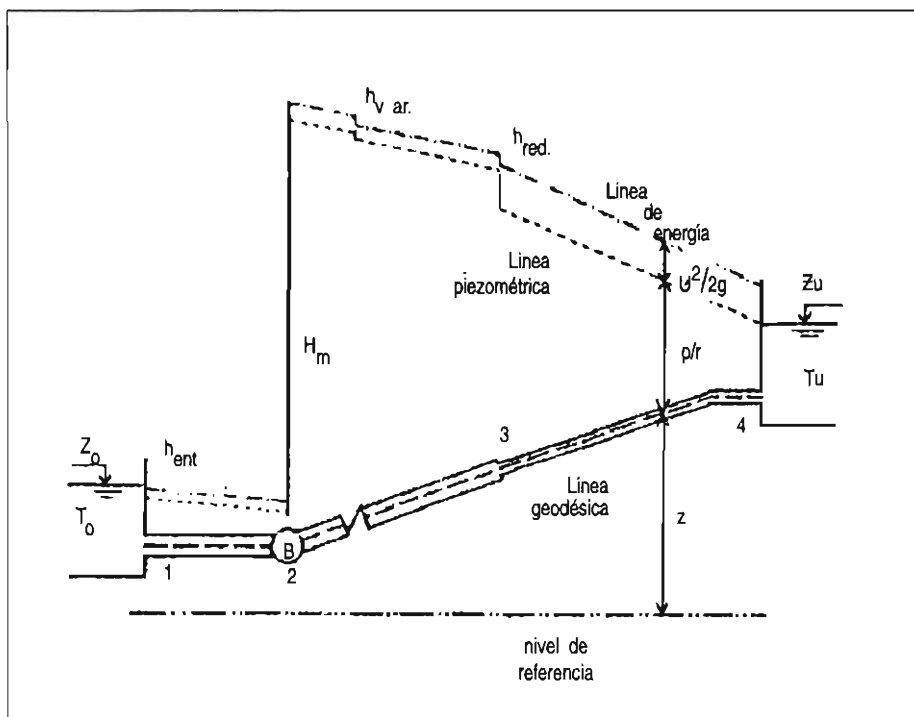


Figura 1.13: Ejemplo de diagrama de energía.

esto no es problema; lo importante es que los términos de la energía están en escala. El volumen de control que deberá tomarse para analizar este problema puede iniciar en la sección 1 o, mejor, en la sección 0, que corta al tanque T_0 . En efecto, si se toma un volumen de control como el de la figura 1.14.a, puede suponerse que el líquido ingresa por la sección marcada como 0-0' y lo hace con velocidades muy pequeñas (esto es particularmente cierto si dicha sección está lo bastante alejada de la entrada a la tubería como para que no le afecte la concentración de velocidades que se produce en las proximidades de ésta). Todas las hipótesis requeridas para aplicar la ecuación de la energía en su forma 1.24 se cumplen para este volumen de control; por otra parte, en cualquier punto de la sección 0-0', la energía piezométrica coincide con la elevación z_0 de la superficie libre del tanque, pues la distribución de presiones es hidrostática; además la energía cinética puede considerarse nula por ser muy bajas las velocidades; por lo tanto la ecuación de la energía se reduce a:

$$z_0 - \left(z_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{U_i^2}{2g} \right) = H_{f_{0-i}}$$

También puede inferirse que la línea de energía total pasa por la superficie libre del tanque y coincide en ella con la piezométrica.

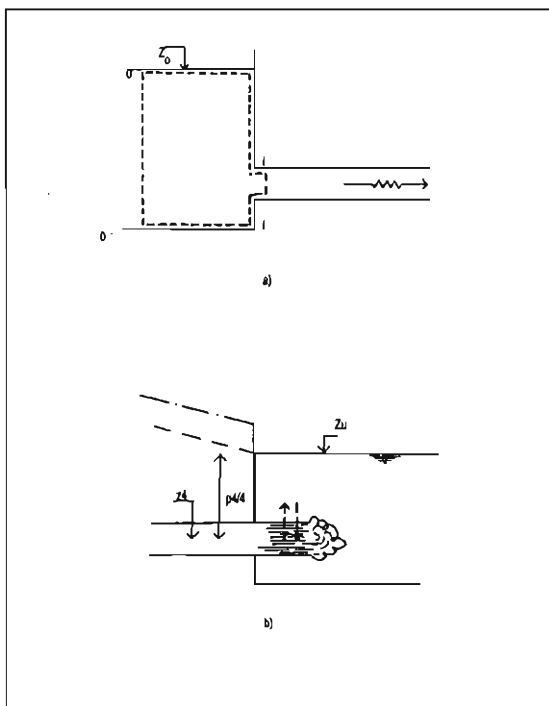


Figura 1.14: a) Volumen de control a la entrada de un tubo.
b) Tubo que descarga en un depósito.

A continuación, se analizará el diagrama de energía de la figura 1.13 de izquierda a derecha (lo cual equivale a desplazar progresivamente la sección de salida A_i del volumen de control a lo largo de la conducción). En la entrada de la tubería existe una pérdida secundaria debida a la singularidad que supone dicho accesorio, por lo cual se observa un descenso localizado h_{ent} de la línea de energía; la piezométrica descende aún más porque a partir de la sección 1 la energía cinética salta de cero a $U_1^2/2g$. Entre el punto 1 y la bomba hay un descenso gradual de la línea de energía, causado por la pérdida primaria debida a la fricción en ese tramo. A continuación la bomba entrega al líquido una energía neta h_m , llamada *carga de la bomba*, la cual corresponde al término H_s de la 1.24; esto provoca una elevación brusca de las líneas de energía y piezométrica. En lo sucesivo, éstas vuelven a descender; las pérdidas primarias originan caídas graduales, proporcionales a las longitudes de los tramos respectivos, mientras que las secundarias ocasionan caídas localizadas; éstas últimas se simbolizan con la letra h acompañada de un subíndice que indica el tipo de accesorio que provoca la pérdida (ejemplo: $h_{v.ar.}$ significa pérdida secundaria debida a la válvula antirretorno). Vale la pena comentar lo que ocurre al llegar al tanque T_u : a diferencia de la entrada 1, en cuyo entorno las partículas se aceleran gradualmente hasta llegar al interior del tubo, en la salida 4 el chorro penetra en el tanque y su energía cinética se disipa completamente en forma de difusión turbulenta (figura 1.14.b); por otro lado, es claro que la presión en el chorro es igual a la del líquido que lo rodea⁵; dado que éste se encuentra en reposo, dicha presión es, por la ecuación de la hidrostática.

$$P_4 = \gamma (Z_u - z_4)$$

Si de ésta se despeja...

$$Z_u = z_4 + P_4/\gamma$$

...puede deducirse que la línea piezométrica llega a la superficie libre del tanque en la salida. Si además se considera que la pérdida por salida es igual a la energía cinética del chorro, se deduce que la línea de energía total vuelve a coincidir con la piezométrica en la superficie libre del tanque T_u , al igual que en T_o .

Si el volumen de control se establece entre los puntos o y u de la figura 1.13, la ecuación resulta:

$$z_o - Z_u = H_{f_{o-u}} - H_m \quad (1.39)$$

Otras observaciones que pueden hacerse a partir del diagrama de la figura 1.13 son las siguientes:

- i) Las líneas de energía total y piezométrica son paralelas, toda vez que la sección transversal de la tubería sea constante; esto es lógico, pues si el área es constante también lo será la velocidad por la ley de continuidad, y por lo tanto el término $U^2/2g$ permanece invariable.
- ii) La caída de la línea de energía es más pronunciada entre menor sea el diámetro de la tubería; esto se demostrará en el siguiente capítulo y se debe a que la pérdida es creciente con la velocidad.

⁵ En efecto, esto se puede demostrar por el absurdo: si la presión alrededor del chorro fuera diferente a la que posee éste, el flujo sería transversal al chorro (flechas punteadas en la figura 1.14.b). Siempre que una zona de alta presión se pone en contacto con una de baja presión, el fluido se desplaza directamente de la primera a la segunda.

iii) *La variable de ajuste en las condiciones forzadas es la presión.* Esto es muy importante; véase que el término z queda definido por el trazado vertical de la tubería, mientras que la velocidad (y por lo tanto la energía cinética $U^2/2g$) queda determinada por el diámetro de la misma. El término que absorbe las pérdidas de energía y que se ajusta a los demás es el de la presión γ ; una adición de energía por una bomba es esencialmente un aumento de presión, y una pérdida por fricción o por accesorio se traduce en una reducción de la presión. Es por esto que frecuentemente se habla de *pérdidas de presión o caídas de presión* en lugar del término apropiado de pérdidas de energía.

Otro comentario interesante, que se pondrá en evidencia al resolver algunos ejemplos, es que *cundo la tubería es larga y la velocidad en su interior no es exagerada*, la energía cinética resulta muy pequeña frente a los demás términos; esto ocurre, por ejemplo, cuando la conducción tiene 1000 metros o más y la velocidad media es de 1 a 2 m/s, que es el rango considerado económico; entonces puede aceptarse que:

$$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \cong z + \frac{P}{\gamma} \quad (1.40)$$

Dicho de otro modo: en tales casos las líneas de energía total y piezométrica prácticamente coinciden. Esto es importante tenerlo presente ya que los cálculos pueden simplificarse.

A continuación, se resuelven algunos problemas con aplicaciones de las ecuaciones de conservación.

Problema resuelto 1.1: Ecuación de continuidad. Un tubo de 12 cm de diámetro, en el cual $U_1 = 2.3 \text{ m/s}$, conduce a un difusor formado por dos placas de 55 cm de diámetro y 5 cm de separación, entre las cuales el agua sale radialmente (figura 1.15). Calcular la velocidad de salida.

Solución. En este caso, se cumplen las hipótesis i) a iv) del apartado 1.3.2; en la salida la sección no es plana, pero sí es normal al flujo, que es lo importante, ya que el líquido sale radialmente; puede entonces aplicarse la 1.16

$$U_1 A_1 = U_2 A_2$$

$$U_1 \pi D_1^2/4 = U_2 \pi D_2 e$$

en efecto, la sección de entrada es circular y la salida es cilíndrica. Despejando

$$U_2 = U_1 \frac{\pi D_1^2/4}{\pi e D_2} = 2.3 \text{ m/s} \frac{\pi (0.12 \text{ m})^2/4}{\pi \times 0.55 \text{ m} \times 0.05 \text{ m}} = 0.3 \text{ m/s}$$

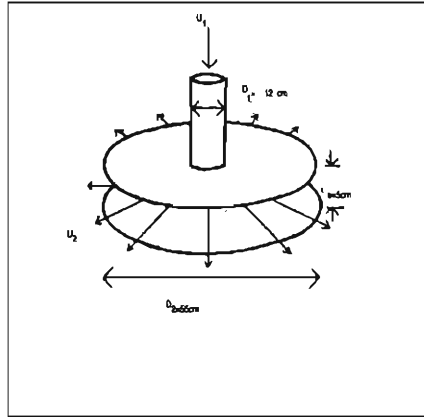


Figura 1.15: Problema resuelto 1.1.

Problema resuelto 1.2: Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento lineal. Calcular la fuerza dinámica en el *codo reductor* de la figura 1.16, suponiendo que no hay pérdidas de energía en el mismo. El caudal es de 300 l/s y el peso de la masa de agua es de 850 kgf. La presión $P_1 = 0.22 \text{ MPa}$.

Solución. Este problema es un ejemplo de aplicación de los tres principios de conservación, no obstante que destaca el de la cantidad de movimiento porque el objetivo es el cálculo de la fuerza dinámica que el líquido aplica al contorno sólido que lo rodea. El volumen de control será, naturalmente, el tramo de tubería comprendido entre las secciones 1 y 2. Aplicando la ecuación de continuidad, resulta:

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = Q$$

despejando

$$U_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi D_1^2/4} = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.3 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (0.5 \text{ m})^2} = 1.53 \text{ m/s}$$

$$U_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.3 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (0.25 \text{ m})^2} = 6.11 \text{ m/s}$$

De acuerdo al enunciado del problema, pueden despreciarse las pérdidas de energía entre 1 y 2, por lo cual puede aplicarse la ecuación de Bernoulli.

$$z_1 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}$$

Las elevaciones z_1 y z_2 son iguales ya que el eje de la tubería se encuentra en el plano horizontal x-y; las velocidades U_1 y U_2 y la presión P_1 son conocidas; la incógnita en este caso es la presión P_2

$$P_2 = \gamma \left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} \right) = 9,800 \left(\frac{0.22 \times 10^6}{9,800} + \frac{1.53^2 - 6.11^2}{19.6} \right) =$$

$$= 202,000 \text{ Pa} = 0.202 \text{ MPa}$$

Finalmente debe aplicarse la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\sum \bar{F} = p Q (\bar{U}_2 - \bar{U}_1) \quad (1.19)$$

Recuérdese que $\sum \bar{F}$ es la suma de fuerzas aplicadas sobre el volumen de control; las que, por conveniencia, se separarán en tres términos: los empujes en las caras extremas $\overline{p_1 A_1}$ y $\overline{p_2 A_2}$, el peso de la masa líquida \bar{W} y, finalmente, las fuerzas aplicadas por el contorno sólido \bar{F}_c

$$(\overline{p_1 A_1} + \overline{p_2 A_2}) + \bar{W} + \bar{F}_c = p Q (\bar{U}_2 - \bar{U}_1) \quad (1.41)$$

La incógnita del problema es la fuerza \bar{F}_d que aplica la masa líquida sobre el contorno sólido y que, por el principio de acción y reacción, es igual y de sentido contrario a \bar{F}_c ($\bar{F}_d = -\bar{F}_c$), por lo tanto

$$\bar{F}_d = p Q (\bar{U}_1 - \bar{U}_2) + (\overline{p_1 A_1} + \overline{p_2 A_2}) + \bar{W} \quad (1.42)$$

Por tratarse de una ecuación vectorial, debe descomponerse en los tres ejes del espacio: U_1 es paralela al eje x y tiene su mismo sentido, en cambio U_2 tiene dos componentes ($U_{2x} = U_2 \cos \theta$; $U_{2y} = U_2 \sin \theta$); algo parecido ocurre con los empujes, con la diferencia de que en este caso las componentes de $\overline{p_2 A_2}$ son negativas; el peso \bar{W} es la única fuerza que actúa sobre el eje z

$$F_{dx} = p Q U_1 - p Q U_2 \cos \theta + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta$$

$$F_{dy} = -p Q U_2 \sin \theta - p_2 A_2 \sin \theta$$

$$F_{dz} = -W$$

reemplazando con los valores numéricos

$$F_{dx} = [1000 \times 0.3 (1.53 - 6.11 \cos 35^\circ) + \pi/4 \times 10^6 (0.22 \times 0.5^2$$

$$- 0.202 \times 0.25^2 \times \cos 35^\circ)] N = 34\,000 \text{ N}$$

$$F_{dy} = [-1000 \times 0.3 \times 6.11 \sin 35^\circ - 0.202 \times 10^6 \pi/4 \times 0.25^2 \times$$

$$\sin 35^\circ] N = -6\,740 \text{ N}$$

$$F_{dz} = -9.8 \times 850 \text{ N} = -8330 \text{ N}$$

La composición de estas tres fuerzas arroja la fuerza dinámica total

$$F_d = \sqrt{F_{dx}^2 + F_{dy}^2 + F_{dz}^2} = \sqrt{34.000^2 + (-6,740)^2 + (-8,330)^2} = 35,650 \text{ N}$$

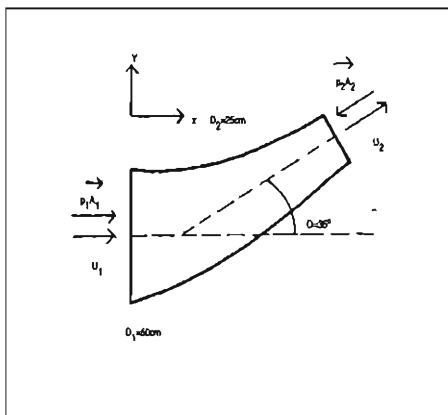


Figura 1.16: Problema resuelto 1.2.

Problema resuelto 1.3: Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento angular. ¿Cuál es el momento con el que debe diseñarse el empotramiento 0 de la figura 1.17? El gasto es de 120 l/s de agua. Despréciense las pérdidas de energía. El diámetro de la tubería es de 20 cm y la longitud entre las secciones 1 y 2 es de 2.7 m.

Solución. Por la ecuación de continuidad será

$$U_1 = U_2 = \frac{4 Q}{\pi D_2} = \frac{4 \times 0.12 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (0.2 \text{ m})^2} = 3.82 \text{ m/s}$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento angular es, para este caso, la siguiente

$$\sum \bar{M}_o = p Q (\bar{r}_{o2} \times \bar{U}_2 - \bar{r}_{o1} \times \bar{U}_1) \quad (1.21)$$

El primer miembro representa los momentos exteriores aplicados al volumen de control, o bien el momento provocado por las fuerzas exteriores

$$\sum \bar{M}_o = \sum (\bar{r}_o \times \bar{F}) \quad (1.43)$$

Al igual que en el caso del problema anterior, las fuerzas \bar{F} son las siguientes: los empujes en las caras extremas $p_1 A_1$ y $p_2 A_2$, el peso \bar{W} del agua y la fuerza \bar{F}_c aplicada por el contorno lateral formado por

la tubería. El punto O, con respecto al cual se tomarán los momentos, es arbitrario; si se lo elige inteligentemente podrá evitarse el cálculo de algunas de estas fuerzas, en este caso convendrá elegir el centroide de la sección A_1 ; de esta manera podrá despreciarse el momento del peso \bar{W} , pues su recta de acción pasa muy cerca de este punto; el momento del empuje sobre la sección A_1 es cero porque dicha fuerza pasa por el punto O; además, el empuje sobre la sección A_2 es nulo porque la presión en la misma es la atmosférica. Por lo tanto, la única fuerza que genera momento es F_c , la que el contorno aplica sobre el líquido y por el principio de acción y reacción ese momento es igual y de sentido contrario al momento M_d ejercido por el agua.

$$M_d = - \sum \bar{M}_o$$

Reemplazando en la 1.21

$$M_d = p Q \left(\bar{r}_{o1} \times \bar{U}_1 - \bar{r}_{o2} \times \bar{U}_2 \right) \quad (1.44)$$

El primer término del segundo miembro se anula, pues $r_{o1} = 0$; sólo queda el segundo

$$\bar{r}_{o2} \times \bar{U}_2 = r_2 U_2 \quad (\text{con signo positivo; ver figura 1.17})$$

Reemplazando en la 1.44

$$M_d = -p Q r_{o2} U_2 = -1000 \times 0.12 \times 2.7 \times 3.82 \text{ Nm} = -1\,240 \text{ Nm}$$

Se invita al lector a que resuelva nuevamente este problema pero estimando el momento debido al peso \bar{W} del agua. ¿Fue adecuado despreciarlo? ¿Si no es despreciable, al menos es seguro el cálculo realizado aquí?

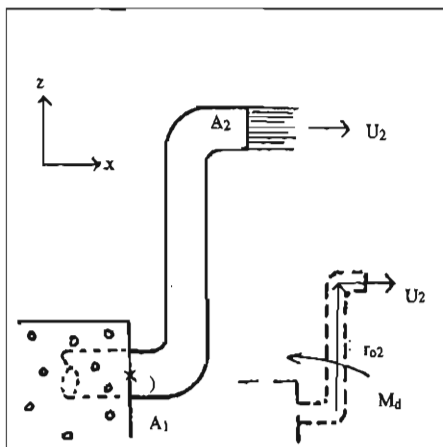


Figura 1.17: Problema resuelto 1.3.

Problema resuelto 1.4: Ecuación de Bernoulli. Encontrar la relación entre el gasto y la lectura Δh del manómetro, para el medidor Venturi de la figura 1.18.

Solución. El medidor Venturi es un caso típico de aplicación de la ecuación de Bernoulli, ya que entre las secciones 1 y 2 el tramo de tubería es corto y además el flujo es convergente. De manera que podrá admitirse que:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \quad (1.26)$$

Reordenando

$$\frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} = \left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right)$$

Además, por la ley de continuidad es $U_1 A_1 = U_2 A_2$; combinando esta expresión con la anterior resulta

$$U_2^2 \frac{1 - (A_2/A_1)^2}{2g} = \left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right)$$

Despejando

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2g \left[\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \right]} \quad (1.45)$$

Para introducir Δh en la fórmula anterior, se aplicará la ecuación de la hidrostática al manómetro (ver figura)

$$P_a = P_1 + \gamma (z_1 - z_a)$$

$$P_b = P_2 + \gamma (z_2 - z_b)$$

$$P_a = P_b + \gamma_{Hg} (z_b - z_a)$$

donde γ_{Hg} es el peso específico del mercurio; combinando estas tres ecuaciones, se obtiene

$$\left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right) \Delta h = \left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right)$$

Reemplazando en la (1.45)

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(A_2/A_1\right)^2}} \sqrt{2g \left(\gamma_{Hg}/\gamma - 1\right) \Delta h}$$

Para conocer el gasto basta multiplicar la velocidad U_2 por el área A_2

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(A_2/A_1\right)^2}} \sqrt{2g \left(\gamma_{Hg}/\gamma - 1\right) \Delta h} \quad (1.46)$$

Esta ecuación pone en evidencia que la inclinación del tubo Venturi no influye en la relación entre Q y Δh .

Sustituyendo valores numéricos en la (1.46)

$$Q \left(m^3/s \right) = \frac{\pi/4 \times 0.125^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.125^2}{0.2^2}\right)^2}} \sqrt{19.62 \left(\frac{133,200}{9,800} - 1\right) \Delta h \text{ (m)}}$$

$$Q \left(m^3/s \right) = 0.209 \sqrt{\Delta h \text{ (m)}} \quad 6$$

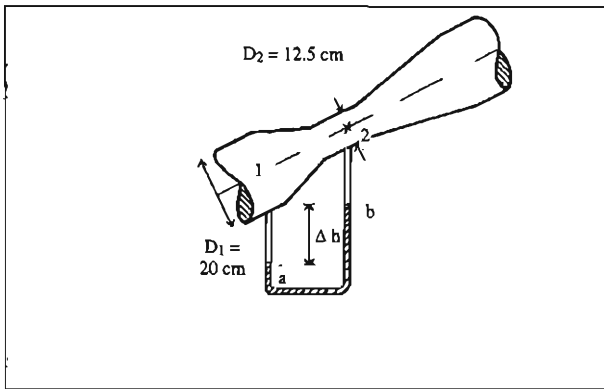


Figura 1.18: Problema resuelto 1.4.

⁶ Para fines prácticos, una determinación precisa del gasto requiere que se multiplique este gasto por un "coeficiente de velocidad" que oscila entre 0.95 y poco más de la unidad, con un vector promedio de 0.98 [20].

Problema resuelto 1.5: Ecuación de conservación de la energía. En la tubería de la figura 1.19, la pérdida de energía primaria responde a la ecuación $h_f (m) = 0.002 U (m/s)^2 L (m)$. En la entrada, la pérdida secundaria equivale a la mitad de la energía cinética, y en la válvula al 15% de ésta. La bomba tiene una potencia de 15 HP y una eficiencia del 70%. El gasto es de 70 l/s, el diámetro de 25 cm y la longitud de 200 m. Determinar el nivel z_o y trazar el diagrama de energía.

Solución. La forma general de la ecuación de la energía es

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right) = H_f - H_s \quad (1.24)$$

Si se le plantea entre los puntos o y u, desaparecen del primer miembro los términos P/γ y $U^2/2g$, ya que la presión en ambos puntos es la atmosférica y la velocidad es prácticamente cero; la pérdida H_f se compone de la pérdida primaria y las pérdidas secundarias: a la entrada, en la válvula y la energía cinética de salida que se disipa en el tanque: el término H_s corresponde en este caso a la carga H_m de la bomba⁷. Resumiendo:

$$z_o - z_u = h_f + h_{ent.} + h_{valv.} + \frac{U^2}{2g} - H_m \quad (1.47)$$

La pérdida primaria h_f se calcula de acuerdo con lo especificado por el enunciado, para lo cual es preciso calcular primeramente la velocidad media U , de acuerdo al principio de continuidad

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{4 Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.07 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (0.25 \text{ m})^2} = 1.43 \text{ m/s}$$

$$h_f (m) = 0.002 \times U (m/s)^2 \times L (m) = 0.002 \times 1.43^2 \times 200 = 0.818 \text{ m}$$

Las pérdidas secundarias serán, también, de acuerdo al enunciado

$$h_{ent} = 0.5 \frac{U^2}{2g} = 0.5 \times \frac{1.43^2}{19.6} = 0.052 \text{ m}$$

$$h_{valv} = 0.15 \frac{U^2}{2g} = 0.016 \text{ m}$$

La energía cinética a la salida es

⁷ En rigor, H_m es la carga neta de la bomba; o sea, la que el líquido recibe del impulsor (H_s), pero descontando las pérdidas hidráulicas (Δh_i) que tienen lugar en el interior de la bomba; es decir que $H_m = H_s - \Delta h_i$. De todos modos, si el lector hace el análisis correspondiente, verá que la ecuación 1.24 sigue siendo válida.

$$\frac{U_2}{2g} = 0.104 \text{ m}$$

La carga de la bomba se calcula con su fórmula de potencia

$$N = \frac{\pi Q H_m}{\eta}$$

donde N^8 es la potencia y η la eficiencia de la bomba; despejando la carga

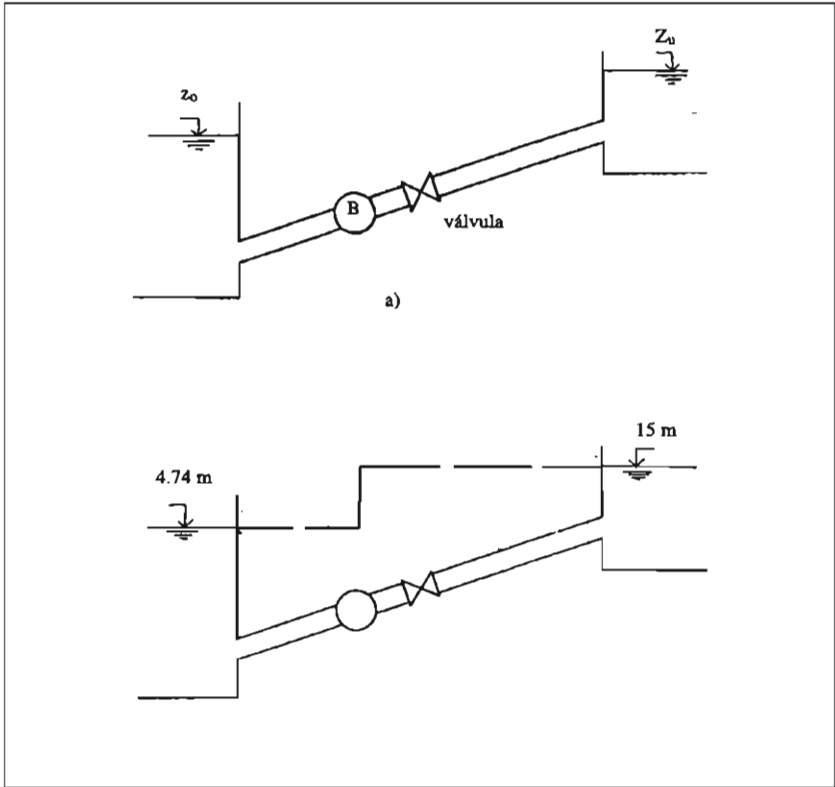


Figura 1.19: a) Planteo. b) Diagrama de energía.

⁸ En este texto, toda vez que se lea HP se entenderá HP métrico, también llamado Caballo Vapor, cuyas equivalencias son:
 1 HP métrico = 0.735 KW
 = 0.986 HP inglés
 = 75 kgf-m/s

$$H_m = \frac{\eta N}{\gamma Q} = \frac{0.7 \times 15 \text{ HP} \left(735 \frac{\text{W}}{\text{Hp}} \right)}{9,800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.07 \text{ m}^3/\text{s}} = 11.25 \text{ m}$$

Reemplazando en la 1.47 los valores calculados y observando que $z_u = 15 \text{ m}$

$$z_o - 15 \text{ m} = 0.818 \text{ m} + 0.052 \text{ m} + 0.016 \text{ m} + 0.104 \text{ m} - 11.25 \text{ m}$$

$$z_o = 4.74 \text{ m}$$

En la figura 1.19.b, se dibuja el diagrama de energía resultante. Obsérvese que la energía es lo bastante baja como para que las líneas de energía total y piezométrica prácticamente coincidan.

Problema resuelto 1.6: Ecuaciones de conservación para volúmenes de control con varias entradas y salidas. El sistema de la figura 1.20.a representa una tubería que descarga un tanque a presión y que luego se bifurca en dos tramos; uno de ellos descarga a la atmósfera, y en el otro es conocida la presión en la sección 3 ($P_3 = 0.13 \text{ MPa}$). El gasto en el tramo 1-2 es de 10 l/s y en el 2-4 de 4 l/s. La pérdida en 1-2 es de 1.2 m. La bomba tiene una potencia de 2 HP y una eficiencia de 69%.

- Trazar el diagrama de energía suponiendo que las pérdidas secundarias son despreciables frente a las primarias.
- Calcular la acción dinámica sobre la bifurcación con el mismo supuesto.

Solución.

- Se introducirán aquí expresiones correspondientes a las ecuaciones de conservación para el caso de varias entradas y salidas, pero manteniendo el resto de las hipótesis simplificadoras; tal es el caso de este problema. Efectivamente, se puede considerar que el volumen de control tiene una entrada en la sección 1 y dos salidas, respectivamente, en las secciones 3 y 4. La expresión correspondiente para la *ecuación de continuidad* es:

$$\sum_{\text{entradas}} Q_6 - \sum_{\text{salidas}} Q_s = 0 \quad (1.48)$$

Para el caso es

$$Q_1 - (Q_3 + Q_4) = 0$$

Reemplazando valores numéricos

$$10 \text{ l/s} - (Q_3 + 4 \text{ l/s}) = 0$$

Despejando

$$Q_3 = 10 \text{ m}^3/\text{s} - 4 \text{ m}^3/\text{s} = 6 \text{ m}^3/\text{s}$$

Las velocidades medias son:

$$U_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{4 Q_1}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.01}{\pi \times 0.1^2} \text{ m/s} = 1.27 \text{ m/s}$$

$$U_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{4 Q_3}{\pi D_3^2} = \frac{4 \times 0.006}{\pi \times 0.075^2} = 1.36 \text{ m/s}$$

$$U_4 = \frac{Q_4}{A_4} = \frac{4 Q_4}{\pi D_4^2} = \frac{4 \times 0.004}{\pi \times 0.075^2} = 0.905 \text{ m/s}$$

Para aplicar la *ecuación de conservación de la energía* a este caso, es conveniente recordar que los términos de la misma en su expresión 1.24 no son energías propiamente dichas sino energías por unidad de peso como se dijo en su momento. Por eso, una forma más estricta de escribir dicha ecuación es la que resulta de multiplicarla miembro a miembro por el peso ΔW , que es el del líquido que pasa por cada sección en el intervalo de tiempo Δt ; se puede demostrar que dicho peso es igual a:

$$\Delta W = \gamma \Delta V = \gamma \frac{\Delta V}{\Delta t} \Delta t = \gamma Q \Delta t \quad (1.49)$$

multiplicando la 1.24 por esta cantidad resulta:

$$\gamma Q \Delta t \left[\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right) \right] = E_f - E_s \quad (1.50)$$

(E_f y E_s son cantidades análogas a H_f y H_s pero expresadas, ahora sí, en unidades de energía).

De esta manera, los términos de la ecuación quedan expresados como energías propiamente dichas; claro que esto no es necesario más que desde un punto de vista estrictamente conceptual. Sin embargo, para el caso de este problema, en el que el volumen de control tiene varias entradas y/o salidas, sí es conveniente tener en cuenta la validez de esta expresión; que para este ejemplo concreto tendrá la siguiente forma:

$$\gamma Q \Delta t \left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \gamma Q_3 \Delta t \left(z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \frac{U_3^2}{2g} \right) + \gamma Q_4 \Delta t \left(z_4 + \frac{P_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g} \right) = E_f - E_s$$

En este caso se ha introducido en cada término el gasto que entra o sale por esa sección. Para simplificar podría quitarse de la ecuación el producto $\gamma \Delta t$, que aparece en todos los términos del primer miembro, con lo que quedaría:

$$Q_1 \left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - Q_3 \left(z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \frac{U_3^2}{2g} \right) - Q_4 \left(z_4 + \frac{P_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g} \right) = \frac{1}{\gamma} (N_f - N_s) \quad (1.51)$$

(N_f y N_s son cantidades análogas a H_f y H_s , pero expresadas como potencias; recuérdese que potencia es igual a energía sobre tiempo).

En algunos casos puede ser importante aplicar esta ecuación pero si lo que se desea es conocer la distribución de energía a lo largo de la conducción puede encararse el problema desde otro punto de vista que se explica a continuación: En la figura 1.20.b se presenta un detalle de la bifurcación; véase que es posible imaginar un volumen de control que abarque la totalidad de la tubería 2-b, pero sólo una parte de la a-2, aquélla por la cual fluye el gasto Q_b (zona rayada de la figura); de esta manera vuelve a tenerse un volumen de control con una sola entrada y una sola salida, para el cual se puede plantear la ecuación en su forma conocida

$$\left(z_a + \frac{P_a}{\gamma} + \frac{U_a^2}{2g} \right) - \left(z_b + \frac{P_b}{\gamma} + \frac{U_b^2}{2g} \right) = H_f - H_s \quad (1.52)$$

Análogamente puede hacerse entre las secciones a y c. De esta manera, puede aceptarse que la ecuación de conservación de la energía se aplique en su forma clásica 1.24 entre dos secciones cualesquiera de un sistema de tuberías. Desde un punto de vista teórico, el término H_f de la ecuación puede no significar una pérdida en el sentido estricto de una disipación de energía en forma de calor; esto particularmente en lo que se refiere a la pérdida secundaria debido al accesorio empleado en la bifurcación. Sin embargo, de todos modos la diferencia ($H_f - H_s$) sí interpreta efectivamente la diferencia de energía entre las secciones extremas y hay forma de evaluarla como se verá en el capítulo 3. Para el caso del problema, puede aplicarse la ecuación entre las secciones 1 y 3, por ejemplo o, al igual que se ha hecho otras veces, entre el punto 0 y la sección 3

$$\left(z_o + \frac{P_o}{\gamma} + \frac{U_o^2}{2g} \right) - \left(z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \frac{U_3^2}{2g} \right) + H_f - H_s$$

En el punto 0, la velocidad es prácticamente nula ($U = 0$), no así la presión cuyo valor se indica en la figura. El término H_f consta, en este caso, de las pérdidas primarias en los tramos 1-2 y 2-3, ya que las pérdidas secundarias se suponen despreciables. El término H_s corresponde a la carga de la bomba.

$$\left(z_o + \frac{P_o}{\gamma} \right) + \left(z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \frac{U_3^2}{2g} \right) = h_{f1-2} + h_{f2-3} - H_m$$

Reemplazando valores numéricos

$$\left(18 + \frac{0.22 \times 10^6}{9800} \right) - \left(20 + \frac{0.13 \times 10^6}{9800} + \frac{1.36^2}{19.6} \right) = 1.2 + h_{f2-3} - H_m$$

La carga de la bomba se calcula como en el problema anterior

$$H_m = \frac{\eta N}{\gamma Q_3} = \frac{0.69 \times 2 \text{ HP} \times \left(735 \frac{W}{HP}\right)}{9800 \times 0.006} = 17.25 \text{ m}$$

Reemplazando este valor en la ecuación precedente y despejando h_{f2-3} , resulta

$$h_{f2-3} = 23.14 \text{ m}$$

La presión en el punto 2 puede calcularse aplicando la ecuación de la energía entre 0 y 2

$$\left(z_0 + \frac{P_0}{\gamma}\right) - \left(z_2 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}\right) = h_{f1-2}$$

Sustituyendo

$$\left(18 + \frac{0.22 \times 10^6}{9800}\right) - \left(16 + \frac{P_2}{9800} + \frac{1.27^2}{19.6}\right) = 1.2$$

Despejando

$$P_2 = 0.227 \text{ MPa}$$

Desde un punto de vista estricto, la presión en la bifurcación será diferente según que se mida en *a*, *b* o *c* (figura 1.20.b), debido a la diferencia de energías cinéticas, pero véase que los valores de éstas son los siguientes:

$$U_a^2/2g = U_1^2/2g = 1.27^2/19.6 = 0.08 \text{ m}$$

$$U_b^2/2g = U_2^2/2g = 1.36^2/19.6 = 0.09 \text{ m}$$

$$U_c^2/2g = U_3^2/2g = 0.905^2/19.6 = 0.04 \text{ m}$$

Despreciables frente a $\frac{P_2}{\gamma} = 23.2 \text{ m}$

Finalmente se calcula la pérdida en el tramo 2-4

$$\left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}\right) - \left(z_4 + \frac{P_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g}\right) = h_{f2-4}$$

Despreciando la diferencia de energías cinéticas:

$$(16 + 23.2) - (11 + 0) = h_{f2-4}$$

$$h_{f2-4} = 28.2 \text{ m}$$

Los valores calculados hasta el momento, son suficientes para construir el diagrama de energía que se presenta en la figura 1.20.c. En este caso, al igual que en el problema anterior, las líneas de energía y piezométrica prácticamente coinciden.

b) La ecuación de conservación de la *cantidad de movimiento lineal* para varias entradas y salidas, adopta la siguiente expresión

$$\sum \bar{F} = p \left(\sum_{salidas} Q_i \bar{U}_i - \sum_{entradas} Q_i \bar{U}_i \right) \quad (1.53)$$

El volumen de control que debe delimitarse para calcular la acción dinámica sobre la bifurcación, es el que se reproduce en la figura 1.20.b, el cual posee una entrada en la sección a (A_a, U_a, Q_a, P_a) y dos salidas: las secciones b (A_b, U_b, Q_b, P_b) y c (A_c, U_c, Q_c, P_c). La ecuación 1.53 puede descomponerse en los ejes x, z; como puede apreciarse, la velocidad U_a sólo tiene componente en x, lo mismo el empuje $P_a A_a$; no ocurre lo mismo en las secciones de salida

$$\begin{aligned} \sum F_x &= p \left(Q_b u_b \text{ sen } 18^\circ + Q_c u_c \cos 37^\circ - Q_a U_a \right) \\ \sum F_z &= p \left(Q_b U_b \text{ sen } 18^\circ - Q_c U_c \text{ sen } 37^\circ \right) \end{aligned} \quad (1.54)$$

(el signo menos del segundo término del último paréntesis, se debe a que la componente de \bar{U}_c es de sentido opuesto al eje z).

Los términos $\sum F_x$ y $\sum F_z$ están integrados por los empujes sobre las secciones extremas, el peso del líquido y la fuerza \bar{F}_c que el contorno sólido aplica sobre el volumen de control

$$\begin{aligned} \sum F_x &= P_a A_a - P_b A_b \cos 18^\circ - P_c A_c \cos 37^\circ + F_{cx} \\ \sum F_z &= -P_b A_b \text{ sen } 18^\circ + P_c A_c \text{ sen } 37^\circ - W + F_{cz} \end{aligned} \quad (1.55)$$

A continuación, se igualan los segundos miembros de las ecuaciones 1.54 y 1.55 y se hacen las siguientes consideraciones: Las componentes F_{cx} y F_{cz} son iguales y de sentido contrario a F_{dx} y F_{dz} , componentes de la fuerza que el agua aplica sobre la bifurcación; se desprecia la contribución del peso W y, de acuerdo al comentario hecho en el inciso anterior, se supondrá $P_a = P_b = P_c = 0.227 \text{ MPa}$; el resultado es:

$$F_{dx} = p \left(Q_a U_a - Q_b U_b \cos 18^\circ - Q_c U_c \cos 37^\circ \right) + P_a A_a - P_b A_b \cos 18^\circ - P_c A_c \cos 37^\circ$$



$$F_{dz} = p \left(-Q_b U_b \operatorname{sen} 18^\circ + Q_c U_c \operatorname{sen} 37^\circ \right) - P_b A_b \operatorname{sen} 18^\circ + P_c A_c \operatorname{sen} 37^\circ$$

Reemplazando con los datos del problema y los obtenidos en el inciso a):

$$F_{dx} = 1000 \left(0.01 \times 1.27 - 0.006 \times 1.36 \times 0.951 - 0.004 \times 0.905 \times 0.799 \right)$$

$$+ 0.227 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \left(0.1^2 - 0.075^2 \times 0.951 - 0.075^2 \times 0.799 \right)$$

$$F_{dz} = 1000 \left(-0.006 \times 1.36 \times 0.309 + 0.004 \times 0.905 \times 0.602 \right)$$

$$+ 0.227 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times 0.075^2 \times (-0.309 + 0.602)$$

Vale la pena resolver por separado la componente dinámica (primer término de ambas ecuaciones) y la componente estática (segundo término) de la acción dinámica, para comparar su importancia relativa

$$F_{dx} = 2.05 \text{ N} + 27.86 \text{ N} = 29.91 \text{ N}$$

$$F_{dz} = -0.34 \text{ N} + 294 \text{ N} = 294 \text{ N}$$

$$F_d = \sqrt{F_{dx}^2 + F_{dz}^2} = \sqrt{29.91^2 + 294^2} = 295 \text{ N}$$

$$\theta = \arctan \frac{294}{29.91} = 84^\circ 11'$$

(Ver figura 1.20.b).

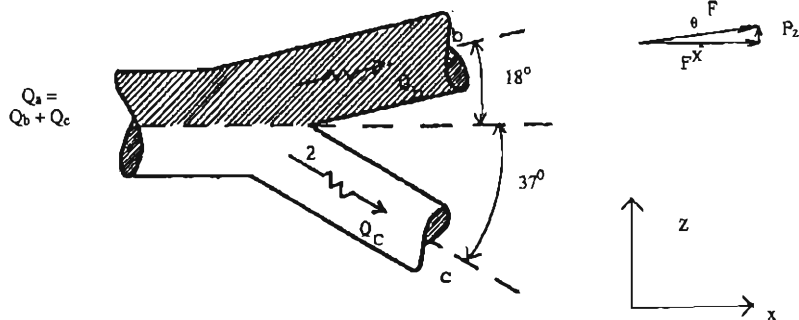
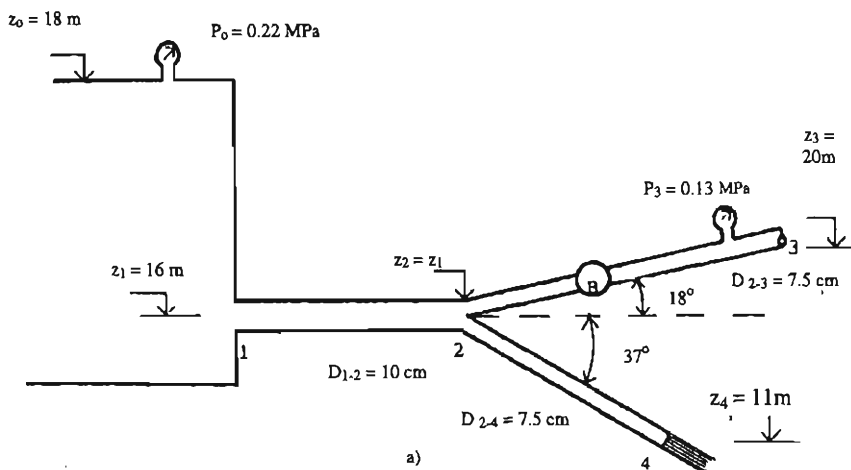


Figura 1.20: Problema resuelto 1.6: a) Vista general. b) Detalle de la bifurcación.

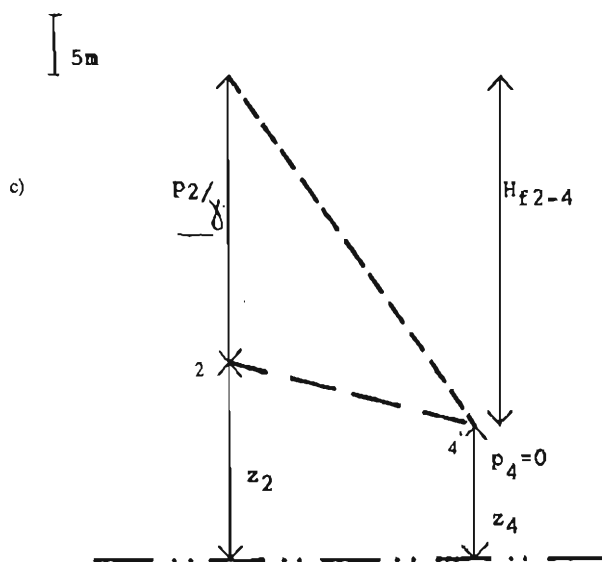
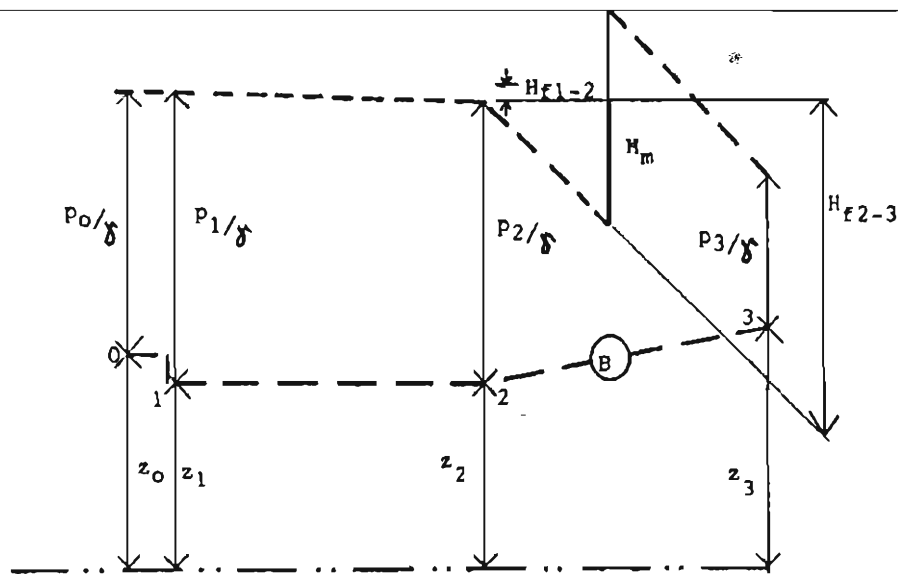


Figura 1.20 (continuación): c) Diagrama de energía.

Resumen del capítulo

- * Un tubo a presión es una conducción líquida que se encuentra totalmente rodeada por un sólido. En la gran mayoría de los casos su sección transversal es circular pues es la que reúne las mayores ventajas. Los conductos a presión tienen una gran importancia en ingeniería por su gran variedad de aplicaciones prácticas.
- * El análisis de los tubos a presión desde el punto de vista hidráulico empieza por la aplicación de las ecuaciones de conservación: de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía. La ecuación de conservación de la masa o de continuidad adquiere para un tubo sencillo la siguiente expresión:

$$U_1 A_1 = U_2 A_2$$

- * La ecuación de conservación de la energía adopta la forma

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right) = H_f - H_s$$

Los términos de esta ecuación representan distintas formas de energía: geodésica, de presión y cinética. El término H_f del segundo miembro representa las pérdidas de energía en forma de calor entre ambas secciones. H_s es la energía entregada o tomada por una máquina hidráulica.

- * La presión juega un papel esencial en el proceso de transformación de energía pues es el término que debe ajustarse a los demás; las pérdidas de energía se traducen principalmente en caídas de presión y por otro lado la adición de energía mediante una bomba provoca un aumento en la presión de la línea.
- * Las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento lineal y angular se emplean principalmente para el cálculo de las fuerzas y momentos aplicados por líquidos en movimiento.
- * La ecuación de Bernoulli es un caso especial de la ecuación de conservación de la energía en el que las pérdidas son despreciables; por aplicación de la misma se pueden resolver diversos problemas prácticos (medidor Venturi, tubo Pitot, sifón, etcétera.).
- * Los términos de la ecuación de la energía se miden en unidades de longitud aunque conceptualmente son energías por unidad de peso; sin embargo esto facilita su representación gráfica a través del diagrama de energía.

Problemas propuestos

1.1 A través de la sección 1 de la figura 1.21 entran $0.006 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua. Supóngase que el flujo es permanente. Determinar los valores U_1 , U_2 (suponiendo flujo radial) y Q_2 .

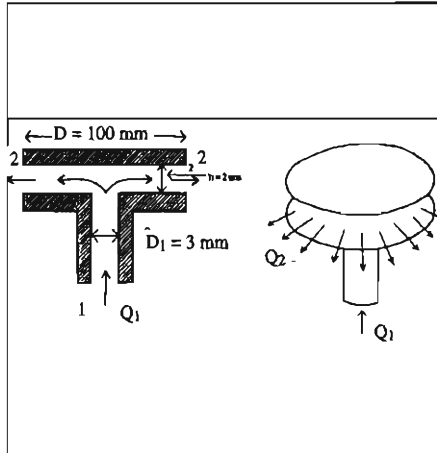


Figura 1.21: Problema propuesto 1.1.

1.2 En la figura 1.22 se tiene un codo reductor a través del cual fluye agua. El plano de la figura es vertical y se sabe lo siguiente: $D_1 = 183 \text{ cm}$, $D_2 = 122 \text{ cm}$, $Q = 8.5 \text{ m}^3/\text{s}$, $W = 80064 \text{ N}$, $\Delta z = 3 \text{ m}$, $\theta = 120^\circ$, $P_1 = 2.7 \text{ MPa}$. Encuentre las componentes F_x , F_z y la resultante F que aplica el codo sobre el agua. Desprecie las pérdidas.

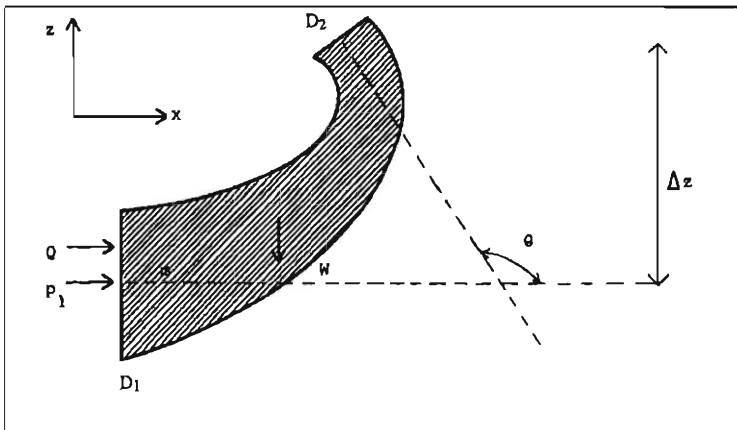


Figura 1.22: Problema propuesto 1.2.

1.3 La manguera de la figura 1.23 tiene un diámetro $D = 0.1 \text{ m}$ y se encuentra unida a una tobera de 20 mm de diámetro D_2 por donde se descargan 700 l/min de agua. Encontrar el valor de la fuerza F_T que se ejerce sobre los tornillos que mantienen fija la manguera a la tobera. Supóngase flujo sin fricción.

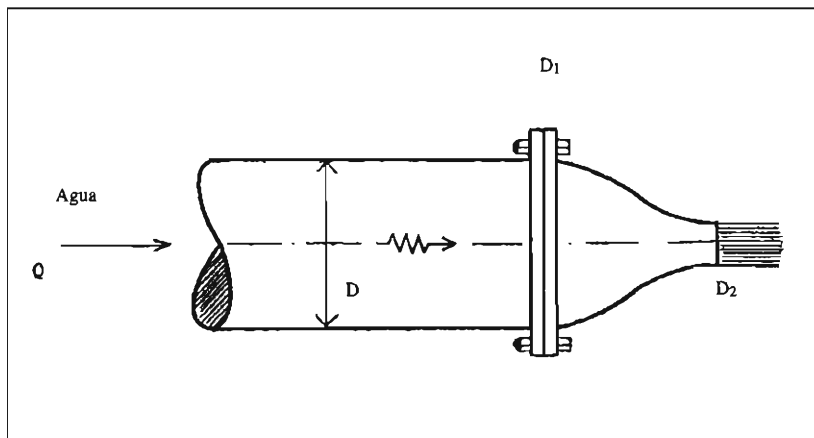


Figura 1.23: Problemas propuestos 1.3 y 1.4.

1.4 Encontrar la fuerza que soportan los tornillos de la boquilla horizontal de la figura 1.23, si se supone flujo permanente incompresible y $D_1 = 20.3 \text{ cm}$, $D_2 = 10.2 \text{ cm}$, $p_1 = 345 \text{ kPa}$, $U_2 = 22 \text{ m/s}$.

1.5 A través del partidor de la figura 1.24, un chorro de agua descarga a la atmósfera. Se sabe que $D_1 = 11 \text{ cm}$, $D_2 = D_3 = 8 \text{ cm}$, $Q_2 = Q_3 = 42 \text{ l/s}$ y $P_1 = 138 \text{ kPa}$. Encontrar la fuerza que soportan los tornillos en la junta.

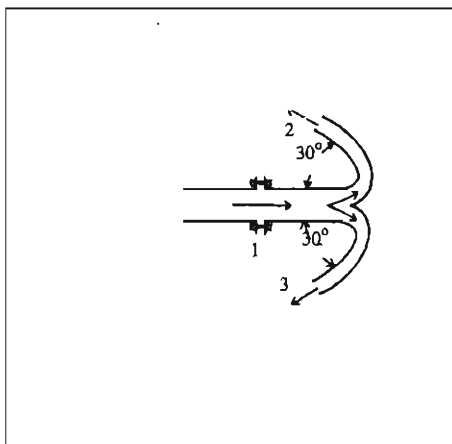


Figura 1.24: Problema propuesto 1.5.

1.6 Los codos de cierto conducto se encuentran fijos al punto A, en la figura 1.25, y mediante uniones flexibles que actúan como articulaciones se conectan al resto de la instalación en las secciones 1 y 2. El líquido es agua a temperatura ambiente. Si $D_1 = D_2 = 7.6 \text{ cm}$, $P_1 = 689.4 \text{ kPa}$, $P_2 = 551.5 \text{ kPa}$, $U_1 = 4.5 \text{ m/s}$, $z_1 = 5 \text{ cm}$ y $z_2 = 25 \text{ cm}$, calcular el par T ejerciendo sobre el soporte en A.

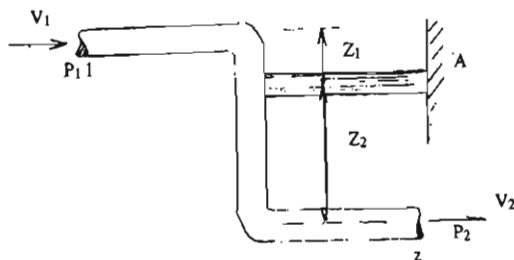


Figura 1.25: Problema propuesto 1.6.

1.7 Para determinar la velocidad de flujo en un tubo (figura 1.26), se usa un medidor Venturi. En la sección 1 el diámetro es de 15.2 cm y en la sección 2 es de 10.2 cm. Si por el tubo fluye agua a 20°C , calcular cuánto vale la descarga por el tubo cuando $P_1 - P_2 = 20.7 \text{ kPa}$.



Figura 1.26: Problema propuesto 1.7.

1.8 Determinar el gasto que escurre en la tubería de la figura 1.27, mediante el uso de medidor Venturi. Despreciando pérdidas.

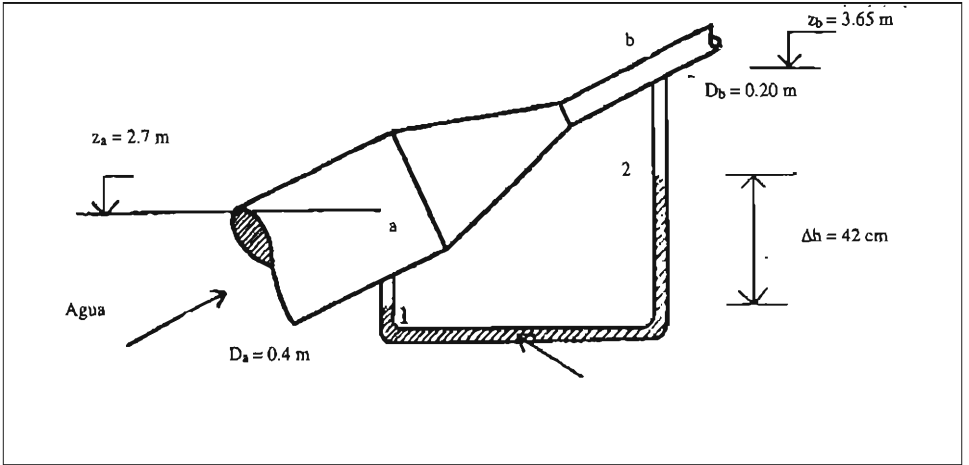


Figura 1.27: Problema propuesto 1.8.

1.9 La figura 1.28.a es un sifón y descarga a $150 \frac{m}{s}$. Encuéntrese la presión en el punto 2 despreciando pérdidas.

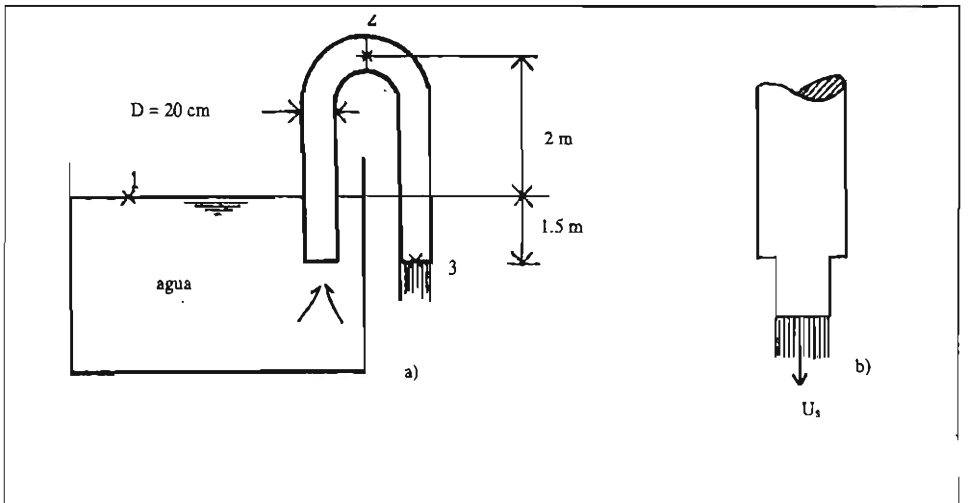


Figura 1.28: Problema propuesto 1.9: a) Vista general. b) Detalle de la boquilla. (Problema propuesto 1.19)

1.10 El tubo pitot mostrado en la figura 1.29 es un dispositivo usado para determinar la velocidad del líquido en el punto 1. Consiste de un tubo con su extremo inferior dirigido a contra corriente y su sección vertical está abierta a la atmósfera. El líquido se eleva por la sección vertical hasta una altura $\Delta z = 20 \text{ cm}$ por encima de la presión estática, como se muestra en la figura, debido al choque del líquido contra el punto 2. Calcular la velocidad en el punto 1. Despreciar las pérdidas.

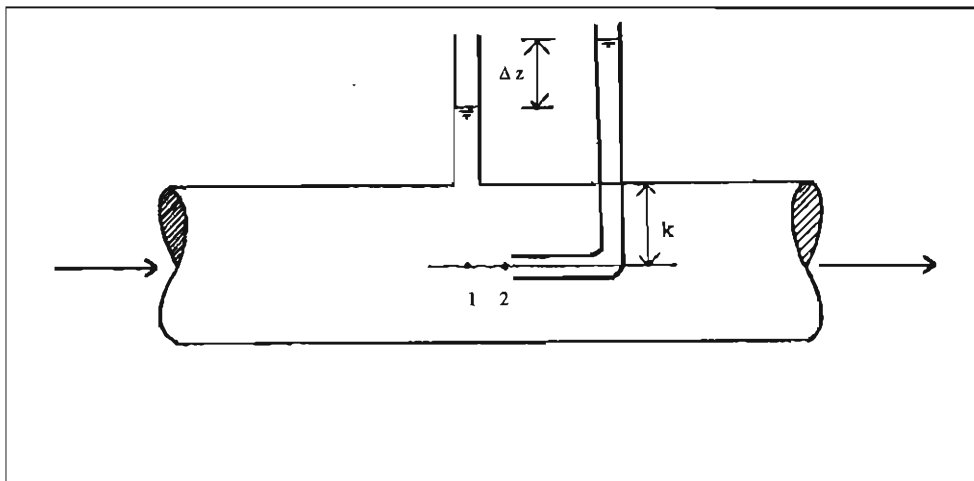


Figura 1.29: Problema propuesto 1.10.

1.11 Despreciando pérdidas y diferencias de altura, calcular la potencia útil que entrega una bomba que descarga $0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua (figura 1.30).

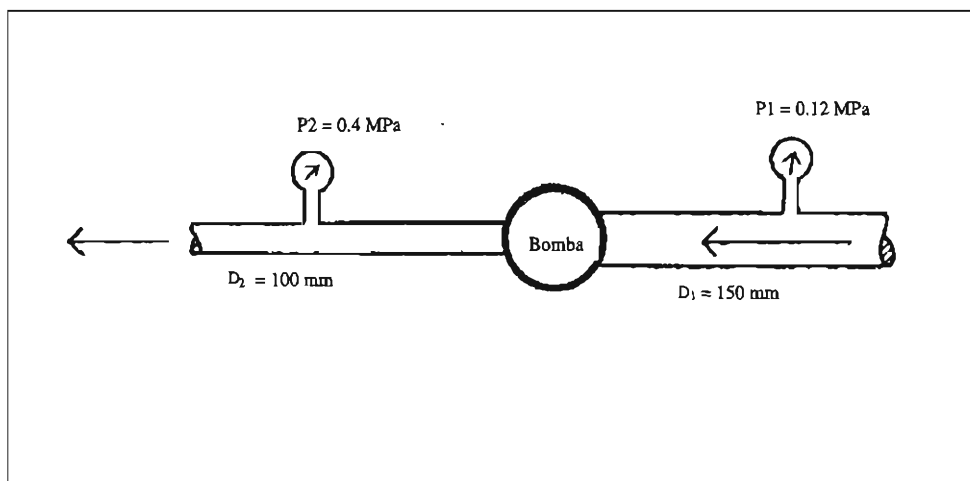


Figura 1.30: Problema propuesto 1.11.

1.12 Trazar en forma cualitativa las líneas piezométricas y de energía en la tubería de la figura 1.31.

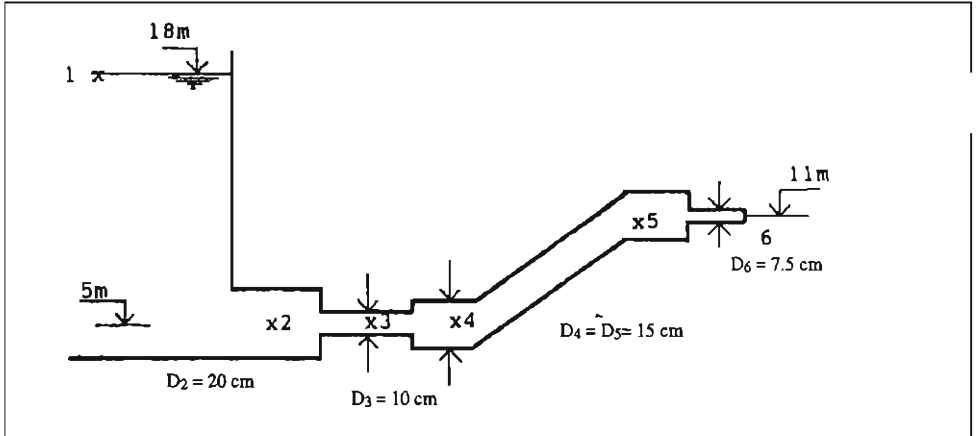


Figura 1.31: Problema propuesto 1.12 (La escala del diámetro está muy exagerada con respecto a la de longitudes).

1.13 En el punto 1 de una tubería que lleva agua, el diámetro es de 3.3 pies, la presión de 14.2 psi y la velocidad de 3.3 pies/s. En el punto 2, 6.6 pies más alto que 1, el diámetro es 1.6 pies y la presión 2.9 psi. Hallar la dirección del flujo.

1.14 Calcular la potencia de la bomba de la figura 1.32, la cual eleva $53 \frac{1}{3}$ de agua del tanque inferior al superior. La eficiencia de la bomba es del 70% y la pérdida de energía en la conducción es de $35 U^2/2g$.

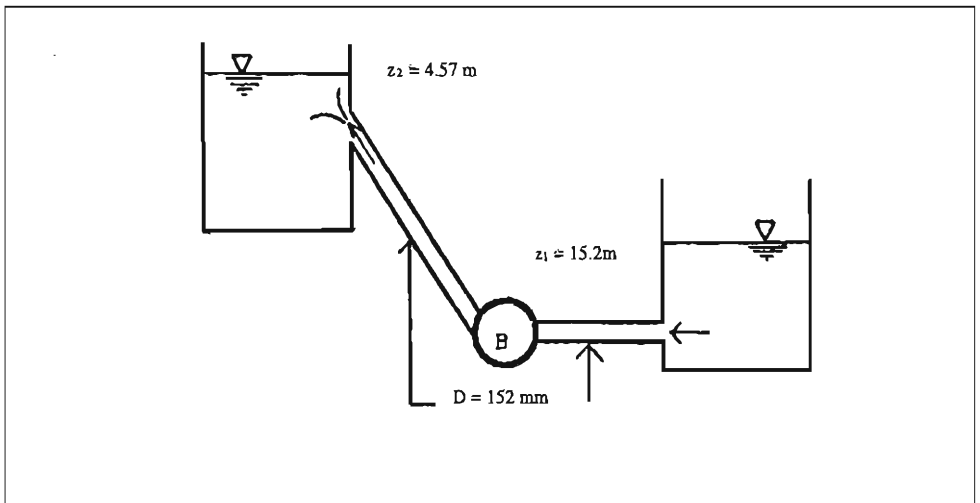


Figura 1.32: Problema propuesto 1.14.

1.15 En la tubería de la figura 1.33 la pérdida de energía es de 5 mm en cada metro de recorrido. En la embocadura se pierde la mitad de la energía cinética y en la salida la totalidad de ésta en concepto de pérdidas secundarias. La bomba tiene una potencia de 20 HP y una eficiencia del 71%. Calcular cuál es el valor de z_0 y trazar las líneas de energía y piezométrica.

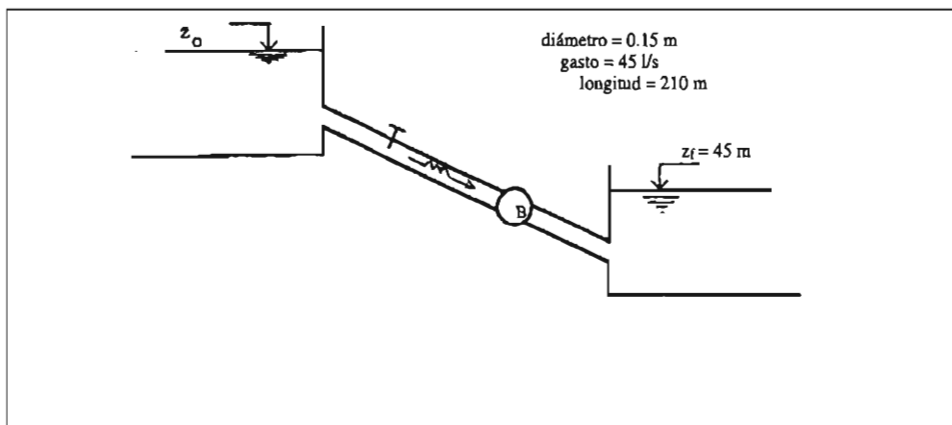


Figura 1.33: Problema propuesto 1.15.

1.16 Considere un tubo de diámetro constante que comunica un depósito de agua con otro que tiene su superficie libre 12 m más abajo. Calcular las pérdidas en metros y en kilowatts para una descarga de $0.6 \text{ m}^3/\text{s}$.

1.17 La bomba de la figura 1.34 entrega al agua una potencia de 5 kW con una eficiencia del 73%. Para una carga de 25 m y pérdidas del sistema de $8 \frac{U^2}{2g}$, calcular el gasto de la bomba. Dibújese el diagrama de energía correspondiente.

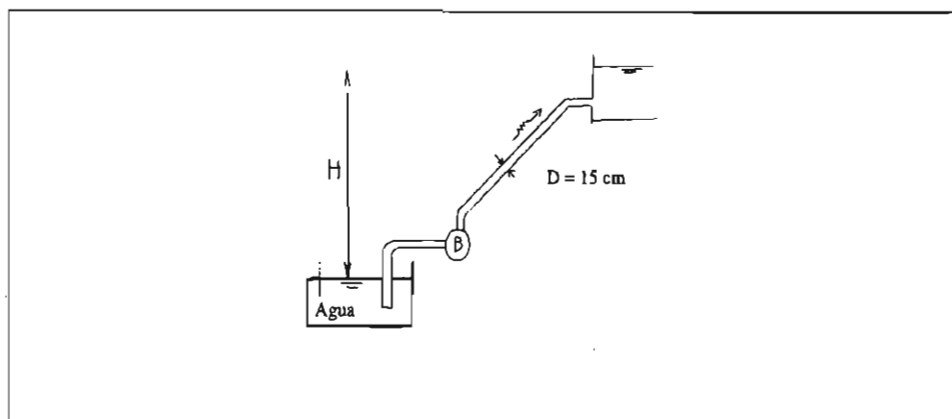


Figura 1.34: Problema propuesto 1.17.

1.18 ¿Cuál será la descarga del tubo en la figura 1.35, si las pérdidas para $\Delta z = 7.6 \text{ m}$ son $3 \frac{U^2}{2g}$?

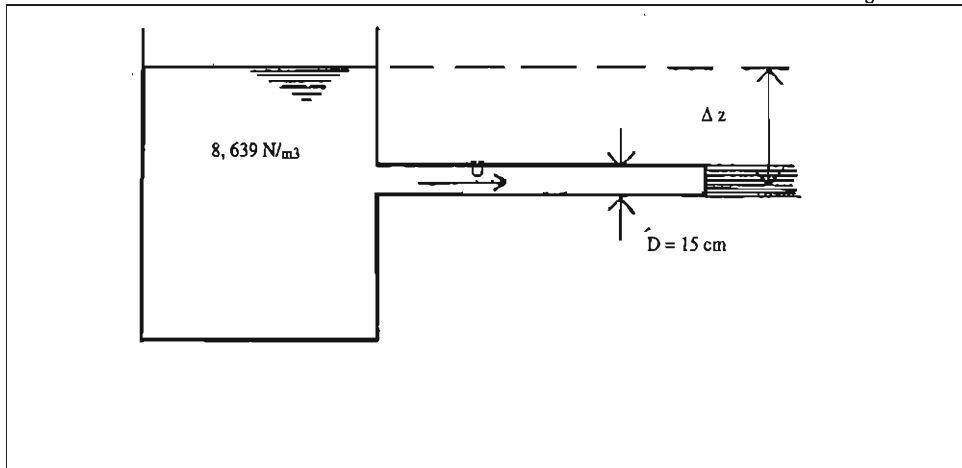


Figura 1.35: Problemas propuestos 1.18 y 1.22.

1.19 Suponga que el sifón de la figura 1.28 tiene una boquilla de 150 mm de largo fijada en la sección 3, reduciendo el diámetro a 150 mm, como se ve en la parte b) de la misma; encuentre el valor de la descarga y la presión en las secciones 2 y 3, despreciando pérdidas.

1.20 Se registra un flujo de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua de la sección 1 a la sección 2 de un tubo, con pérdidas de $\frac{4}{10} (U_1 - U_2)^2 / 2g$. La presión en 1 es de 80 kPa (figura 1.36). Encontrar la presión en 2.

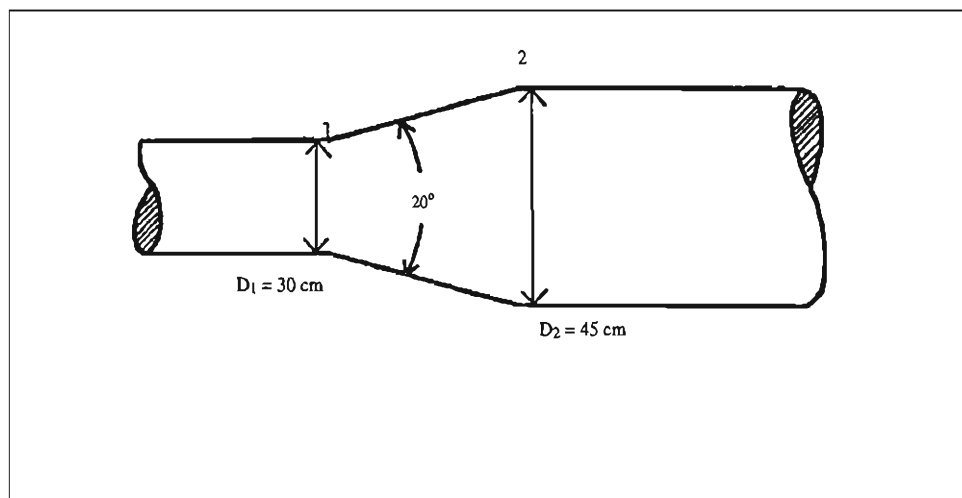


Figura 1.36: Problema propuesto 1.20.

1.21 Calcúlese la descarga y presión en las secciones 2 y 3 del problema 1.19, si se sabe que las pérdidas de 1 a 2 son $1.7 \frac{U_2^2}{2g}$, de 2 a 3 de $0.9 \frac{U_2^2}{2g}$ y a través de la boquilla de $0.06 \frac{U_2^2}{2g}$, donde U_2 es la velocidad media de salida.

1.22 Para la figura 1.35 del problema 1.18 y un gasto de 850 gpm, calcular el valor de Δz si las pérdidas son de $9 \frac{U^2}{2g}$.

1.23 En la figura 1.37 se muestra un dispositivo por el cual circula un flujo permanente de agua. $D_1 = 7.6 \text{ cm}$, $Q_1 = 28.2 \text{ l/s}$, $D_2 = 5 \text{ cm}$, $U_2 = 9.2 \text{ m/s}$. Si se sabe que $D_3 = 2.5 \text{ cm}$, calcúlese U_3 y Q_3 . E indíquese si este flujo es de entrada o salida.

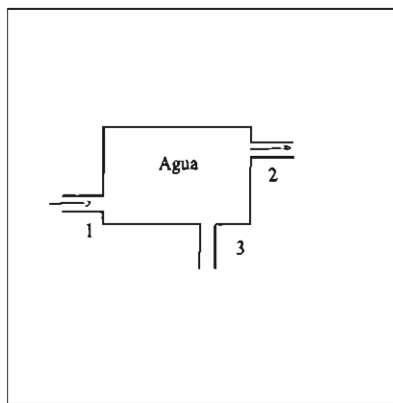


Figura 1.37: Problema propuesto 1.23.

1.24 El tanque de la figura 1.38 se llena con agua a través de la sección 1 a $U_1 = 20 \text{ pies/s}$ y a través de la descarga 3 con $Q_3 = 1 \text{ pie}^3/\text{s}$. Si el nivel de agua z permanece constante, calcular U_2 .

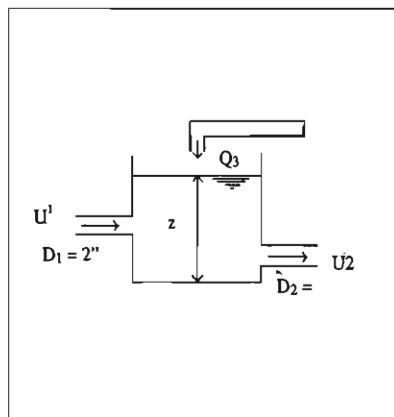


Figura 1.38: Problema propuesto 1.24.

1.25 Calcular la fuerza dinámica que aplica el agua sobre el cubo de 50 cm de lado de la figura 1.39. Todos los tubos tienen 7.5 cm de diámetro.

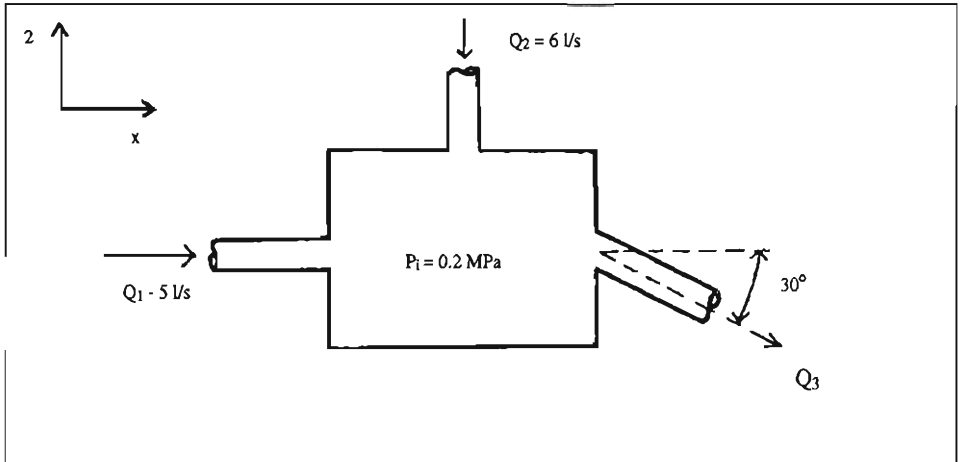


Figura 1.39: Problema propuesto 1.25.

1.26 Un conducto horizontal que se bifurca, divide su gasto de agua en dos caudales iguales. Encontrar p_2 y p_3 así como las dos componentes de la fuerza que el agua ejerce sobre la bifurcación. Desprecie las pérdidas. (Figura 1.40).

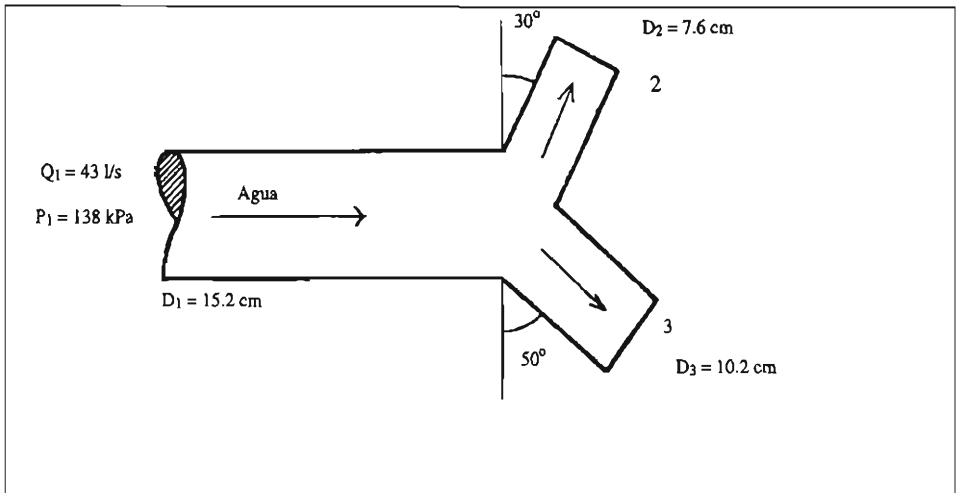


Figura 1.40: Problema propuesto 1.26.

1.27 Calcular la acción dinámica sobre el accesorio con descarga a la atmósfera, cuya vista superior se presenta en la figura 1.41. El diámetro es en todos los casos de 200 mm. El líquido es agua. Desperdiciar pérdidas.

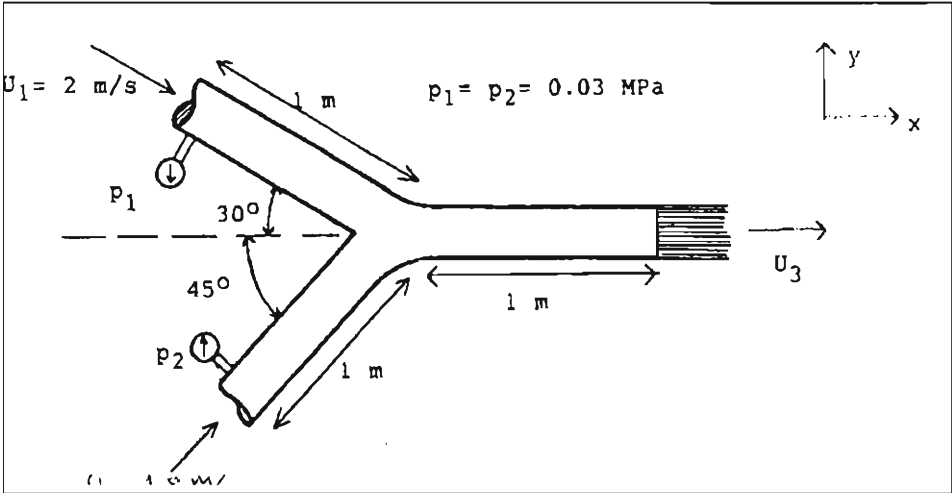


Figura 1.41: Problema propuesto 1.27.

1.28 Para la figura 1.42, despréciense las pérdidas y calcúlese P_2 , P_3 y la magnitud y dirección de la fuerza aplicada sobre el accesorio T .

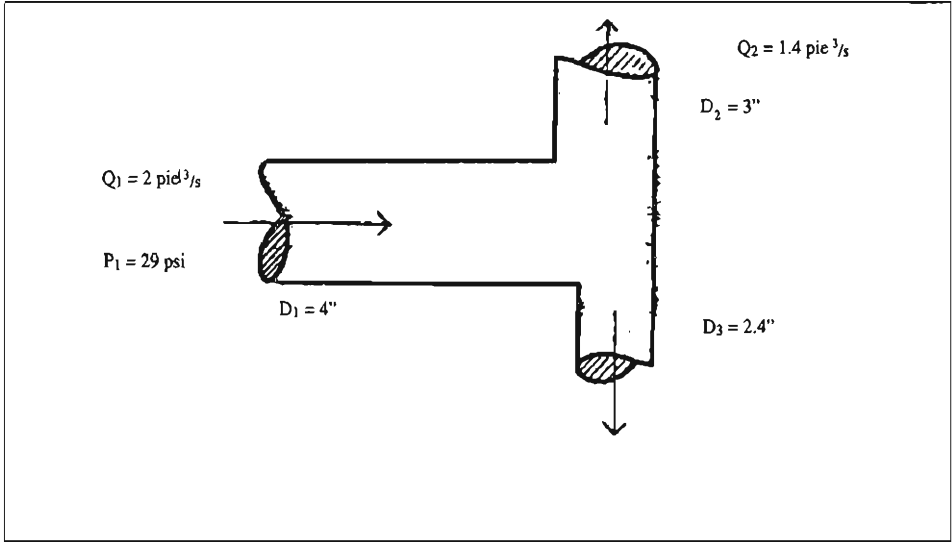


Figura 1.42: Problema propuesto 1.28.

1.29 La superficie horizontal del tanque de la figura 1.43 es la de un cuadrado de 60 cm de lado. Calcular la variación $\frac{dh}{dt}$ de la superficie libre y la fuerza dinámica en el instante inicial. El diámetro de todos los tubos es de 10 cm. (Ayuda: Si bien el flujo no es permanente, las ecuaciones de conservación pueden aplicarse en su forma simplificada para un instante dado; esto se permite porque la variación temporal de las velocidades es muy lenta. (En el apartado 4.7 se tratará con más detalle este punto).

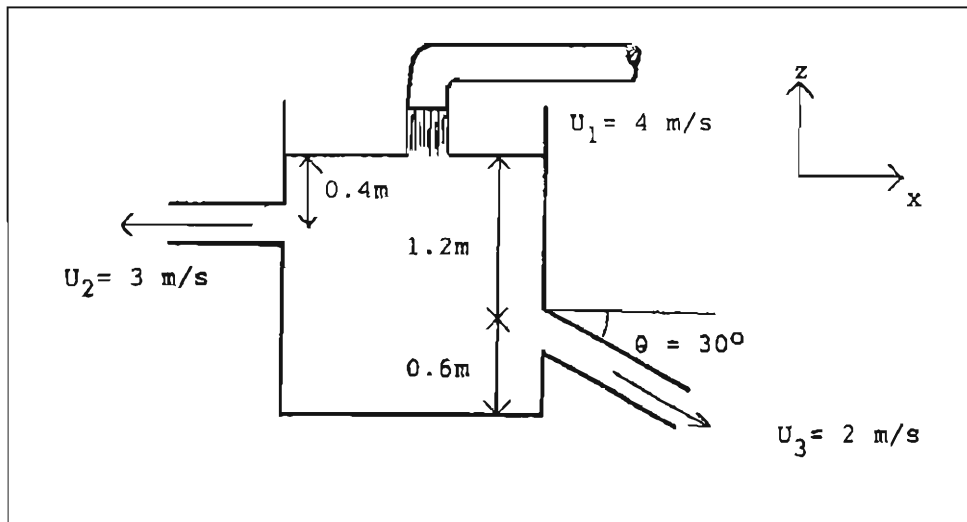


Figura 1.43: Problema propuesto 1.29.

1.30 El tubo de la figura 1.44 tiene 150 mm de diámetro. Sin embargo, debido a una obstrucción, en la salida marcada como 3, la sección del flujo equivale al 40% del área transversal del tubo; y por la misma razón el gasto Q_3 equivale al 60% del gasto que sale a la atmósfera por la sección 2. La presión en la entrada 1 es de 2 kPa y el gasto que entra es de $47 \frac{\text{l}}{\text{s}}$. El peso del agua no se considera.

- ¿Cuánto valen los gastos en ambas salidas a la atmósfera?
- ¿Cuánto vale la acción dinámica sobre el elemento?
- ¿Cuánto vale la acción dinámica si se tapa completamente la salida 2 (manteniéndose el gasto y la presión en 1 que se dieron como dato)?
- ¿Cuánto vale el momento dinámico en el caso c)?
- ¿A qué distancia y a qué lado (derecho o izquierdo) de la sección 1 está la recta de acción de la fuerza calculada en c)?

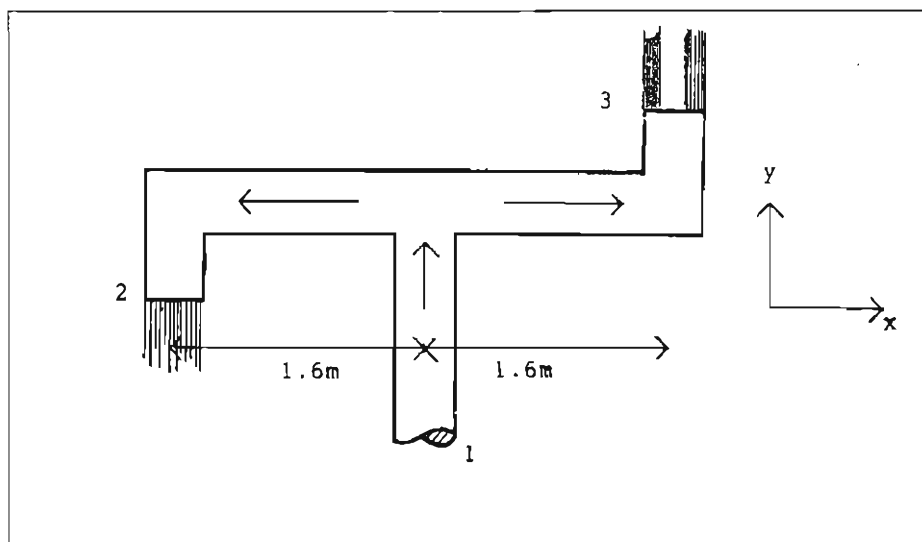


Figura 1.44: Problema propuesto 1.30.

CAPITULO 2

PERDIDAS DE ENERGIA PRIMARIAS

2. PERDIDAS DE ENERGIA PRIMARIAS

- 2.1 La fórmula de Darcy – Weisbach y el factor de fricción.
- 2.2 Regímenes de flujo.
- 2.3 Flujo laminar.
- 2.4 Flujo turbulento.
- 2.4.1 Ecuación de Coolebrook y White.
- 2.4.2 Tubos lisos y rugosos.
- 2.4.3 Envejecimiento de la tubería.
- 2.5 Diagrama de Moody.
- 2.5.1 Empleo del diagrama.
- 2.5.2 Formas alternativas del diagrama de Moody.
- 2.6 Tubos de sección no circular.
- 2.7 Fórmulas empíricas.
- 2.7.1 Fórmulas de Hazen–Williams, Scimemi y Manning–Strickler.

2.1 La fórmula de Darcy – Weisbach y el factor de fricción

La base del cálculo hidráulico de los tubos a presión radica en la evaluación de las pérdidas de energía, o sea, del término H_f de la ecuación 1.24. Como se dijo en su oportunidad, esta cantidad se compone, a su vez, de dos términos: las pérdidas por fricción h_f y las pérdidas secundarias o por accesorios h_a . En el presente capítulo se discutirán y se aprenderá a calcular las primeras, mientras que las segundas son tema del capítulo siguiente.

Como ya se ha visto, el flujo en tubos a presión a régimen permanente es un problema que admite varias hipótesis simplificativas; a pesar de esto, la obtención de las fórmulas para evaluar la pérdida h_f no es sencilla y, en general, requiere del apoyo del método experimental. En efecto, los procedimientos de cálculo empleados actualmente se basan en los resultados de numerosas mediciones realizadas por investigadores e ingenieros.

En todo problema físico, el camino más adecuado para organizar y optimizar el trabajo experimental comienza por la aplicación de la *teoría de la semejanza y el análisis dimensional*.

El primer paso consiste en plantear el fenómeno que va a estudiarse. En este caso, supóngase un tramo de tubería circular recta (figura 2.1), de longitud L y diámetro D , por la cual fluye un gasto permanente Q ; el líquido es incompresible y tanto sus propiedades como las del material que constituye la tubería son también datos del problema. A continuación, es preciso identificar las variables físicas que gobiernan el fenómeno; esta es una tarea no siempre sencilla y no existe una regla que pueda proporcionar dichas variables directamente, pero debe cuidarse que sean suficientes y que no dependan entre sí a través de una relación conocida; por ejemplo, el gasto Q , el diámetro D y la velocidad media U no podrían integrar la misma lista de variables, ya que cualquiera de ellas es función de las otras dos por la ley de continuidad. También es claro que una de las variables debe ser la que se está investigando, en este caso, la pérdida de energía primaria h_f . Las demás pueden clasificarse de la siguiente manera: las características geométricas de la tubería (el diámetro D y la longitud L), las características cinemáticas del flujo (la velocidad media U) y ciertas propiedades del líquido y de la tubería, pero ¿cuáles de ellas? en el caso del líquido, intervendrá la densidad ρ y la viscosidad μ , ya que ésta está íntimamente relacionada con la fricción entre partículas; en cuanto al tubo propiamente dicho, la propiedad que interesa es la rugosidad o aspereza superficial; es indudable que el rozamiento entre el líquido y el contorno sólido también influye en la resistencia al flujo.

Ahora bien ¿cómo se mide la rugosidad? Si se observa al microscopio el corte de la superficie interior de un tubo, éste tendrá un aspecto irregular, parecido a un paisaje montañoso en miniatura (figura 2.2.a); no es fácil encontrar una medida que represente esa aspereza, así es que por el momento se supondrá que se está trabajando con un tubo de rugosidad uniforme y uniformemente distribuída sobre la superficie (figura 2.2.b), cuya altura ϵ es el valor representativo. Resumiendo, la lista de variables será la siguiente:

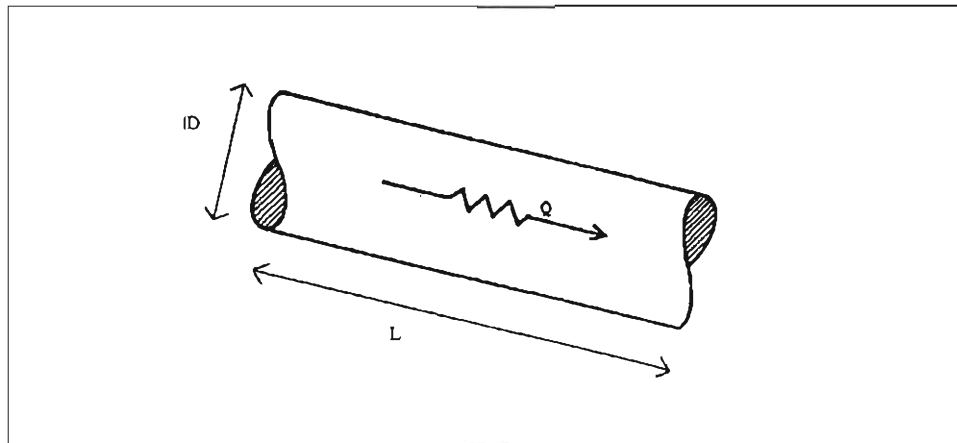


Figura 2.1: Tramo de tubo circular recto.

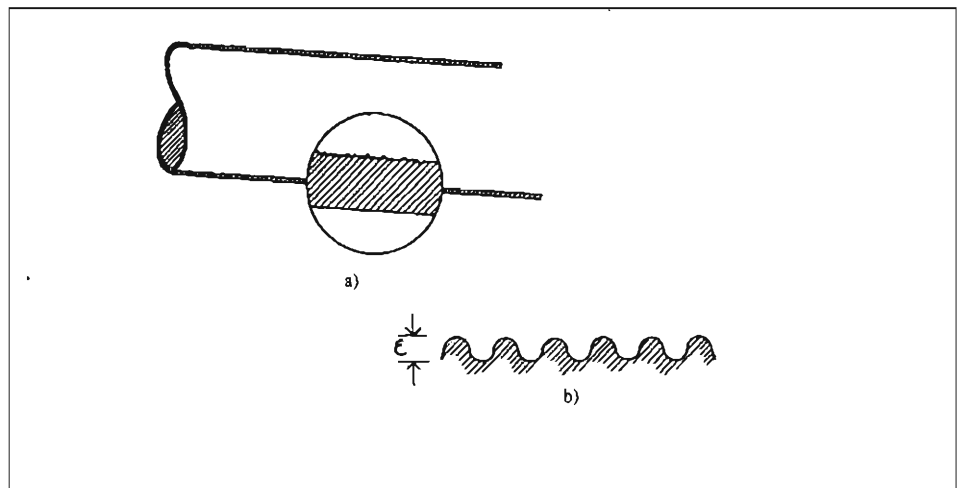


Figura 2.2: a) Corte del tubo visto al microscopio en el que se ve la rugosidad. b) Rugosidad uniforme.

$$h_f, D, L, U, \rho, \mu, \epsilon^1$$

Sin embargo, se harán todavía algunas modificaciones. Por un lado, recuérdese que en el apartado 1.3.3 se demostró que la pérdida es proporcional a la longitud; por lo tanto, no es necesario que ambas variables figuren en la lista: bastará con una sola que, lógicamente, será la pérdida de energía unitaria S_f

$$S_f = h_f / L \quad (1.36)$$

Esta cantidad es adimensional, ya que tanto h_f como L se miden en unidades de longitud. Una forma de transformarla en una variable con dimensiones, es multiplicarla por el peso específico, γ ; si se recuerda que h_f es una energía por unidad de peso, entonces la cantidad resultante, γS_f , será una energía por unidad de volumen de fluido y de longitud de tubería. La lista definitiva de variables será entonces

$$\gamma S_f, D, U, \rho, \mu, \epsilon$$

El teorema de Buckingham dice que si existe una relación funcional entre estas variables, también existe otra relación entre un número menor de parámetros o números adimensionales, los cuales resultan de combinaciones monómicas de aquéllas. El número de parámetros es, generalmente, igual al número de variables (en este caso seis) menos el número de variables físicas fundamentales intervinientes; para este problema, dichas magnitudes fundamentales son tres: longitud, tiempo y masa, ya que todas ellas forman parte de una o más de las variables de la lista (simplemente, en la viscosidad están presentes las tres: $[\mu] = m/Lt$). De manera que, previsiblemente, se obtendrán tres números adimensionales. El procedimiento de aplicación del teorema de Buckingham para la deducción de los mismos, se incluye a continuación.

Los parámetros que van a hallarse responden a la siguiente expresión, por ser combinaciones monómicas de las variables

$$\left(\gamma S_f \right)^{x_1} D^{x_2} U^{x_3} \rho^{x_4} \mu^{x_5} \epsilon^{x_6} = \Pi \quad (2.1)$$

donde las x_i son exponentes racionales y Π es un número adimensional cualquiera. Descomponiendo las variables en sus magnitudes físicas fundamentales.

$$\left(m L^{-2} t^2 \right)^{x_1} \left(L \right)^{x_2} \left(L/t \right)^{x_3} \left(m/L^3 \right)^{x_4} \left(m/Lt \right)^{x_5} \left(L \right)^{x_6} = L^0 t^0 m^0 \quad 2 \quad (2.2)$$

¹ Véase que la presión en el interior de la tubería no está presente en la lista; en efecto, no interesa tanto el valor absoluto de la presión sino, más bien, la diferencia de presión (o de energía) ya representada por h_f .

² Está claro que en esta fórmula, el símbolo L no es la longitud de la tubería, sino que expresa en forma genérica a la longitud como variable física.

La expresión del segundo miembro es obvia, y que si Π es adimensional, los exponentes de L , t y m deben ser nulos. A continuación, se escribe el sistema de ecuaciones que vincula a los exponentes.

$$\begin{array}{llllll} \text{para } L: & -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 + x_6 & = & 0 \\ \text{para } t: & -2x_1 & & -x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ \text{y para } m: & x_1 & & & +x_4 + x_5 & = & 0 \end{array} \quad (2.3)$$

El determinante de esta matriz es el siguiente

$$\left| \begin{array}{cccccc} -2 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

De acuerdo al teorema, si dentro de este determinante no hubiera algún subdeterminante de 3×3 cuyo valor fuera distinto de cero, entonces el número de parámetros adimensionales no sería de 3 sino de 4 o 5; por eso es que se dijo anteriormente que *generalmente* el número de parámetros es igual al de variables menos el de magnitudes fundamentales. Afortunadamente, puede el lector comprobar que, en este caso, existe al menos un subdeterminante no nulo, como lo es el marcado con trazo punteado, de manera que, efectivamente, habrá tres parámetros, los cuales se obtendrán resolviendo el sistema de ecuaciones; como este tiene más incógnitas que ecuaciones, será preciso fijar el valor de algunas de ellas para proceder a resolverlo. A las variables cuyo exponente x se fija a fin de resolver el sistema, se les llama *variables fijables* y su número es igual al de parámetros; en principio, éstas pueden elegirse arbitrariamente, pero siempre conviene hacerlo con criterio; éste consiste en adoptar como variables fijables a las que se desea que aparezcan en un solo grupo adimensional; una de ellas, por supuesto, será la pérdida γS_f (ya que si se encuentra en más de un parámetro será difícil despejarla) y las otras dos serán la viscosidad y la rugosidad, ya que son dos propiedades muy específicas y tampoco conviene que integren más de un grupo adimensional. Los exponentes respectivos de estas tres variables son x_1 , x_5 , x_6 . El primer parámetro Π_1 se obtiene haciendo:

$$x_1 = 1, x_5 = 0 \text{ y } x_6 = 0$$

resolviendo el sistema 2.3, se obtiene

$$x_2 = 1, x_3 = -2 \text{ y } x_4 = -1$$

reemplazando estos seis valores en la ecuación 2.2, resulta

$$\Pi_1 = \frac{\gamma S_f D}{U^2 \rho} \quad (2.4)$$

De manera análoga, Π_2 se obtiene:

$$x_1 = 0, x_5 = -1 \text{ y } x_6 = 0$$

resultando

$$x_2 = 1, x_3 = 1 \text{ y } x_4 = 1$$

entonces

$$\Pi_2 = \frac{U D \rho}{\mu} \quad (2.5)$$

Finalmente, para Π_3 se adopta

$$x_1 = 0, x_5 = 0 \text{ y } x_6 = 1$$

resolviendo el sistema:

$$x_2 = -1, x_3 = 0 \text{ y } x_4 = 0$$

entonces

$$\Pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} \quad (2.6)$$

Los grupos adimensionales resultantes son:

$$\frac{\gamma S_f D}{U^2 \rho}, \frac{U D \rho}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}$$

De ellos, el segundo tiene nombre propio, se llama número *Reynolds* de la tubería y, como se verá a continuación, es igual a la velocidad media en la tubería por el diámetro y dividido por la *viscosidad cinemática* del líquido (ésta es una propiedad que se define como $\nu = \mu/\rho$).

$$Re = \frac{U D \rho}{\mu} = \frac{U D}{\mu/\rho} = \frac{U D}{\nu} \quad (2.7)$$

El tercer parámetro, $\frac{\varepsilon}{D}$, recibe el nombre de rugosidad relativa.

De acuerdo al teorema de Buckingham, existirá una relación funcional que vincule a los tres números: por lo tanto, cualquiera de ellos puede expresarse en función de los otros dos; por ejemplo:

$$\frac{\gamma S_f D}{U^2 \rho} = f_1 (Re, \varepsilon/D) \quad (2.8)$$

A continuación, se procurará despejar la pérdida, que es el objetivo del problema; recordando que $S_f = h_f/L$ (2.1), y que $\gamma/\rho = g$, se obtiene:

$$\frac{g h_f D}{U^2 L} = f_1 (Re, \epsilon/D)$$

$$h_f = f_1 (Re, \epsilon/D) \frac{L}{D} \frac{U^2}{g}$$

Si en el segundo miembro se multiplica y divide por 2, aparecerá la energía cinética.

$$h_f = 2 f_1 (Re, \epsilon/D) \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (2.9)$$

A la cantidad $2 f_1 (Re, \epsilon/D)$ que, en definitiva, también es una función del número de Reynolds y la rugosidad relativa, se le llama factor de fricción f

$$f = 2 f_1 (Re, \epsilon/D) = f_2 (Re, \epsilon/D) \quad (2.10)$$

La ecuación (2.9), entonces, se escribirá:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (2.11)$$

Esta fórmula tiene nombre propio, se llama ecuación *Darcy – Weisbach* y, como puede observarse, cumple con el objetivo de evaluar la pérdida h_f . Para ello, es preciso primero conocer el factor de fricción. De acuerdo con lo que propone el análisis dimensional, esto debe hacerse experimentalmente; deben realizarse numerosas mediciones a fin de obtener la relación entre el factor de fricción y los dos parámetros de los cuales depende. Sin embargo, antes es conveniente hacer algunos comentarios con respecto a la naturaleza de los flujos a presión, y se verá que en algún caso el factor de fricción puede obtenerse en forma analítica y en otros en forma semi-empírica.

2.2 Regímenes de flujo

En seguida, se comentarán dos experiencias clásicas que resultan muy reveladoras del comportamiento de los flujos reales.

La primera, es la *experiencia de Hagen* (figura 2.3). Este investigador midió las pérdidas primarias en un tubo circular con flujo permanente y uniforme, y encontró que:

- a) Para flujo muy lento, la pérdida h_f es proporcional a la velocidad media U . En la gráfica esto se representa con una recta de pendiente igual a uno, dado que se trata de un diagrama de tipo doble-logarítmico; en efecto, si

$$h_f = k U \quad (k \text{ es una constante})$$

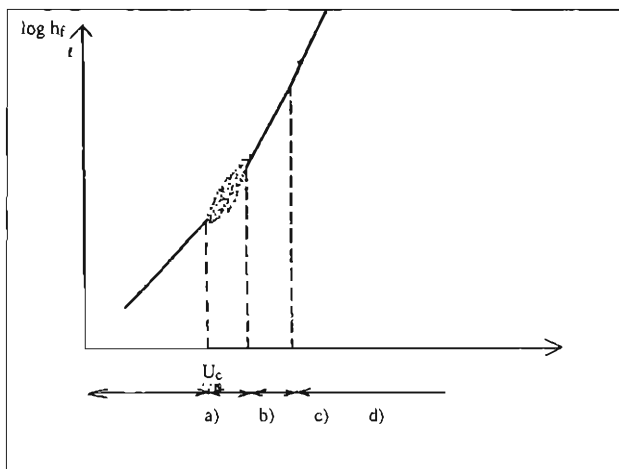


Figura 2.3: Experiencia de Hagen.

entonces

$$\log h_f = \log k + \log U$$

que es una ecuación el tipo $y = a + x$

- b) Para velocidades algo mayores, la correlación entre ambas variables empeora, como se observa en la *nube de puntos* de la figura.
- c) Para velocidades altas, la pérdida se hace proporcional a la velocidad elevada a un exponente próximo a 2.
- d) Para velocidades muy altas, la pérdida es proporcional al cuadrado de la velocidad (recta de pendiente igual a 2 en la parte derecha del diagrama)

Estas observaciones hacen pensar en que a partir de cierta velocidad crítica, que en la figura se llama U_c , el flujo cambia su comportamiento; de lo contrario, no podría existir un quiebre tan brusco en la curva del diagrama. Esta suposición queda plenamente demostrada por una segunda experiencia debida a *Reynolds*, y que consiste en inyectar una sustancia colorante en la entrada a un tubo transparente, como se muestra en la figura 2.4. Si se regula la velocidad mediante la válvula ubicada a la derecha se encuentra que:

- a) Para bajas velocidades, el líquido colorante se desplaza en un filamento esencialmente recto y no se mezcla con el resto del líquido (figura 2.5.a).
- b) Para velocidades intermedias, el filete de colorante se quiebra y comienza a difundirse en el líquido circundante (figuras 2.5.b y c).
- c) Para velocidades altas, el colorante se difunde completamente en el líquido a corta distancia de la boquilla (figura 2.5.d)

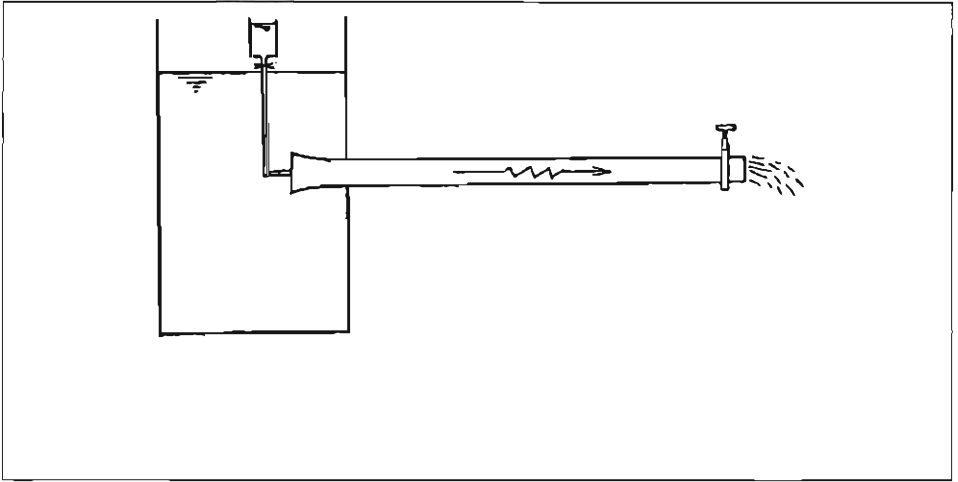


Figura 2.4: Aparato empleado para la experiencia de Reynolds.

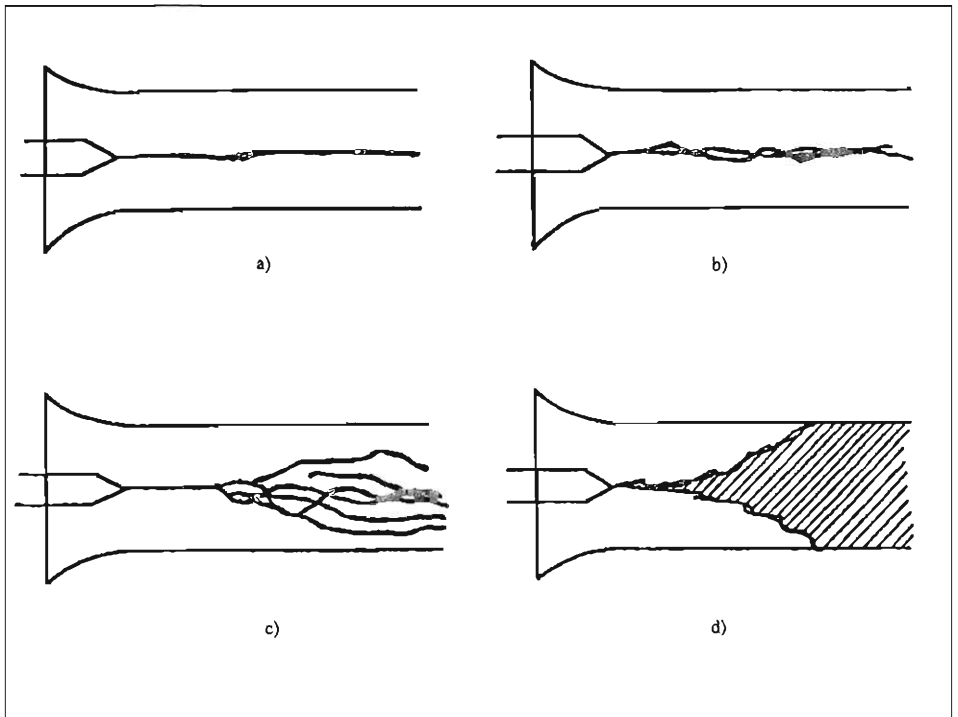


Figura 2.5: Etapas de la experiencia de Reynolds.

Ambas experiencias están, obviamente, muy relacionadas entre sí: el caso a) de la de Reynolds, se conoce como *régimen laminar*; el hecho de que el colorante no se mezcle con el agua, pone de manifiesto que las partículas se desplazan en trayectorias rectas y ordenadas. El caso c), en cambio, se conoce como *régimen turbulento* y en él las partículas, lejos de seguir un recorrido rectilíneo, describen trayectorias quebradas y en cada punto del campo de flujo la velocidad varía instante a instante. La mezcla se produce, precisamente, porque una misma partícula ocupa, sucesivamente, distintos niveles dentro de la tubería; no porque se lo provoque artificialmente, sino como una característica inherente a la naturaleza del flujo.

En la figura 2.6 se pueden observar, también, los regímenes laminar y turbulento, en un ejemplo muy familiar: el de un chorro que descarga a la atmósfera. A partir de cierto valor de la velocidad media, el flujo deja de ser laminar para transformarse en turbulento; esa velocidad crítica es variable según el tamaño de la tubería y el tipo de fluido, pero Reynolds encontró que cumple con la relación

$$U_c \approx k \frac{v}{D} \quad (2.12)$$

donde k es un coeficiente adimensional; depejándolo de la fórmula resulta

$$k = \frac{U_c D}{v}$$

Si se compara esta fórmula con la 2.7, se puede observar que k es un valor especial del número de Reynolds, llamado número de Reynolds crítico, Re_c

$$k = Re_c = \frac{U_c D}{v} \quad (2.13)$$

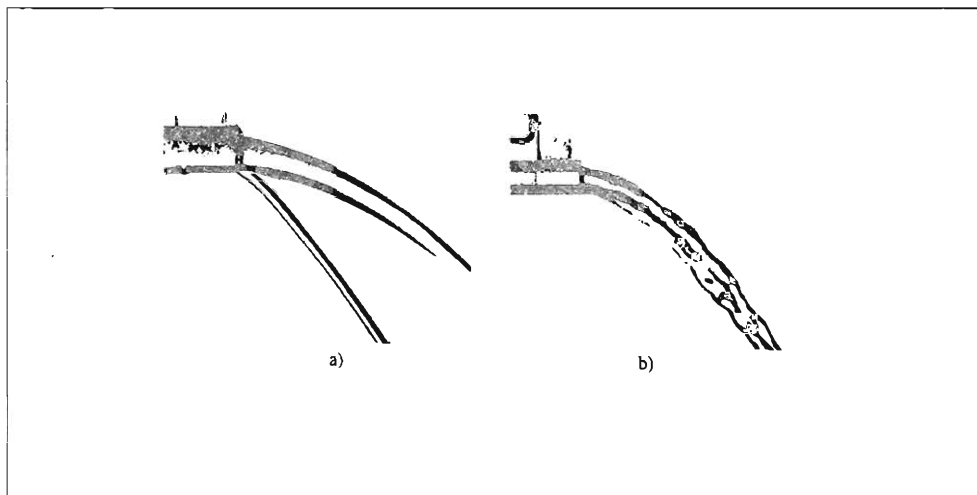


Figura 2.6: Flujo en una descarga a la atmósfera. a) laminar. b) turbulento (Ref. [1]).

Por lo tanto

si $Re < Re_c$ el flujo en el tubo es laminar y

si $Re > Re_c$ el flujo es turbulento

¿Cuánto vale el número de Reynolds crítico? La verdad es que su valor no es fijo. Algunos investigadores reportan que han logrado mantener el flujo laminar hasta valores de Re de 40,000 y aún mayores, pero siempre bajo condiciones especiales de laboratorio tales como mantener el líquido en reposo durante mucho tiempo previo al experimento, y evitar todo tipo de vibraciones. En la práctica ingenieril, se considera que el Re_c nunca es mayor que 4000. Lo que si se ha logrado establecer es que Re_c nunca vale menos de 2,200; el flujo siempre es laminar para valores menores que éste. Por lo tanto, existirá una zona de transición ($2,200 Re < 4,000$) para la cual no es posible predecir con exactitud si el flujo será laminar o turbulento. Esta situación corresponde al caso intermedio de la experiencia de Reynolds y a la *nube de puntos* de la experiencia de Hagen (figura 2.3); obviamente, la velocidad llamada U_c en esta gráfica corresponde a $Re_c = 2,200$ de acuerdo con lo que acaba de explicarse).

¿Cuál es la razón que determina la existencia de estos dos regímenes de flujo? Como se sabe, en cualquier fenómeno físico real, siempre cabe esperar la acción de pequeñas perturbaciones; un cono apoyado sobre su vértice, por ejemplo, puede permanecer, en teoría, perfectamente vertical, pero siempre existirá alguna perturbación que lo desvíe ligeramente de su posición y haga que caiga. En el seno de una masa fluida en movimiento, también existen perturbaciones que provocan pequeños *remolinos* o *torbellinos*; a la fuerza que genera este efecto se le llamará *fuerza desestabilizante* F_d y es de tipo inercial ya que para desviar una partícula de su estado de movimiento uniforme, es preciso acelerarla

$$F_d = m A \quad (2.14)$$

A esta fuerza se le opone una *fuerza estabilizante* F_e , que va a depender de la viscosidad del líquido; entre mayor es la viscosidad, mayor es la energía que se disipa por fricción entre partículas líquidas y, en ese caso, una pequeña perturbación no bastará para generar un remolino porque el consumo de energía que se requiere es importante. Para evaluar esta fuerza, F_e , debe recordarse la ecuación de Newton de viscosidad (referencias [1] a [91])

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (2.15)$$

donde:

τ :	es el esfuerzo cortante entre dos <i>capas</i> de fluido
μ :	es la viscosidad dinámica o absoluta y
$\frac{dV}{dy}$:	es el gradiente de velocidades, o sea la variación de la velocidad en la dirección normal al flujo

Para obtener la fuerza F_e , se multiplica el esfuerzo τ por el área sobre la que actúa

$$F_e = \tau A = A \mu \frac{dV}{dy} \quad (2.16)$$

Combinando las ecuaciones 2.14 y 2.16, se puede encontrar la relación entre F_d y F_e

$$\frac{F_d}{F_e} = \frac{m A}{A \mu \frac{dV}{dy}} = \frac{L^3 \rho \frac{V}{t}}{L^2 \mu \frac{V}{L}} = \frac{L^2 \rho \frac{V}{t}}{\mu \frac{L}{t}}$$

$$\frac{F_d}{F_e} = \frac{L V}{\mu \rho} = \frac{V L}{\nu} \quad (2.17)$$

En el desarrollo anterior, lo que se hizo fue reemplazar las variables intervinientes por combinaciones equivalentes de otras variables (por ejemplo, aceleración = velocidad / tiempo, etc.) hasta llegar a que la relación entre la fuerza (inercial) desestabilizante y la fuerza (viscosa) estabilizante es igual a una velocidad por una longitud entre la viscosidad cinemática del líquido. ¿Qué valores asumen V y L ? en realidad son valores arbitrarios (llamados característicos); sólo debe cuidarse que si se hace una comparación entre dos flujos, la velocidad y la longitud características que se tomen en ambos casos deben ser homólogas. En tuberías a presión se adopta para V la velocidad media del flujo U y para L el diámetro D , de manera que si se compara la 2.17 con la 2.7, la relación entre ambas fuerzas resulta ser el número de Reynolds

$$\frac{F_d}{F_e} = \frac{\mu D}{\nu} = \text{Re} \quad (2.18)$$

Esta conclusión a la que se ha llegado expresa con toda claridad el significado físico del número de Reynolds; es un parámetro que mide la relación entre las fuerzas que provocan la turbulencia y las que tienden a hacerla desaparecer; naturalmente, si las primeras son pequeñas en comparación con las segundas, el número de Reynolds será pequeño y el flujo será laminar; en cambio, si predominan las fuerzas desestabilizantes el número de Reynolds será grande y el flujo será turbulento.

2.3 Flujo laminar

Debido a su carácter ordenado y de trayectorias paralelas, el flujo laminar en tuberías se apega estrictamente a las hipótesis simplificativas hechas hasta el momento. En particular, se destacarán dos de ellas: la de *flujo unidimensional* se cumple rigurosamente ya que las partículas nunca se apartan de su trayectoria recta y paralela al eje de la tubería, y la del *flujo permanente* se verifica ya que en cualquier punto del campo de flujo la velocidad permanecerá constante.³

Para analizar el problema se supondrá un segmento de tubo circular recto, como el de la figura 2.7, y se partirá de la ecuación 1.38 que, como se recordará, evalúa el esfuerzo cortante τ a una distancia r del eje.

$$\tau = \gamma \frac{h_f}{L} \frac{r}{2} \quad (2.19)$$

³ Para hacer esta afirmación se sobreentiende que la causa del flujo es permanente, o sea que el gasto se mantiene constante en el tiempo.

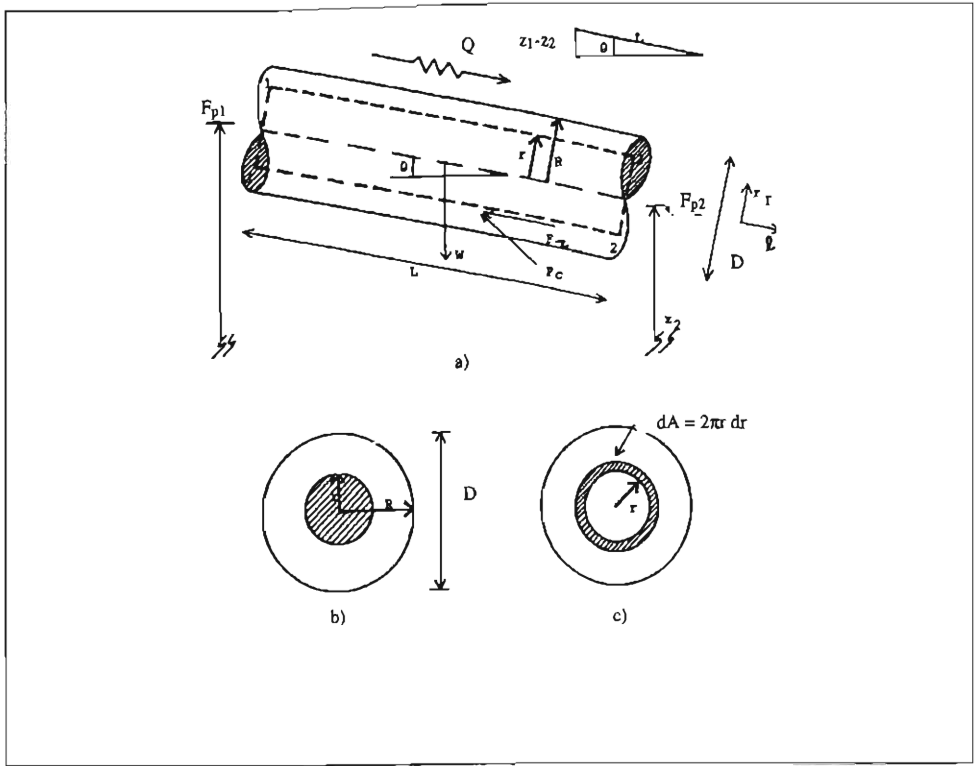


Figura 2.7: Análisis del flujo laminar en tuberías. a) Corte longitudinal. b) Corte transversal (el volumen de control corresponde a la parte rayada). c) Diferencial de área anular.

Esta expresión se combinará con la ecuación de Newton de viscosidad 2.15, la cual puede aplicarse perfectamente al caso porque en flujo laminar las trayectorias son efectivamente rectas y paralelas y por lo tanto debe verificarse que

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr} \quad (2.20)$$

En este caso, se escribe dr (a diferencia de la expresión 2.15) porque precisamente r es la coordenada normal al flujo. El signo menos responde a un criterio que debe observarse siempre que se plantea una ecuación diferencial, y es que conforme crece la variable r disminuye V , ya que ésta es máxima en el centro y decrece hacia los bordes. Igualando la 2.20 con la 2.19 y separando variables

$$-dV = \frac{h_f \gamma}{2 L \mu} r dr \quad (2.21)$$

Esta ecuación es fácilmente integrable. Los límites serán los siguientes: para el radio se integrará entre r (un radio genérico) y R (el radio del tubo), y para la velocidad entre V (una velocidad genérica correspondiente al nivel r) y cero, que es la velocidad en el contacto entre el líquido y la tubería; esto último responde al llamado *principio de Meier*, que dice que toda partícula fluida en contacto con un borde sólido permanece en reposo con respecto a él, y se fundamenta en las leyes de atracción molecular.

$$-\int_v^0 dV = \frac{h_f \gamma}{2 L \mu} \int_r^R r dr$$

$$v = \frac{h_f \gamma}{4 L \mu} (R^2 - r^2) \quad (2.22)$$

Esta última ecuación expresa la ley de variación de velocidades en una tubería en régimen laminar, o sea la función $V(r)$; como puede observarse, ésta es parabólica; la velocidad se hace cero en los bordes donde $r = R$ y es máxima en el eje donde $r = 0$

$$V_{\max} = \frac{h_f \gamma R^2}{4 L \mu}$$

o bien, reemplazando $R = D/2$

$$V_{\max} = \frac{1}{16} \frac{h_f \gamma}{L \mu} D^2 \quad (2.23)$$

En la figura 2.8.a se observa este perfil de velocidades y en la 2.8.b se presenta la misma distribución de velocidades pero en tres dimensiones, su forma es la de un paraboloide de revolución. Si se integra la velocidad a lo largo del área transversal del tubo, se obtendrá el gasto

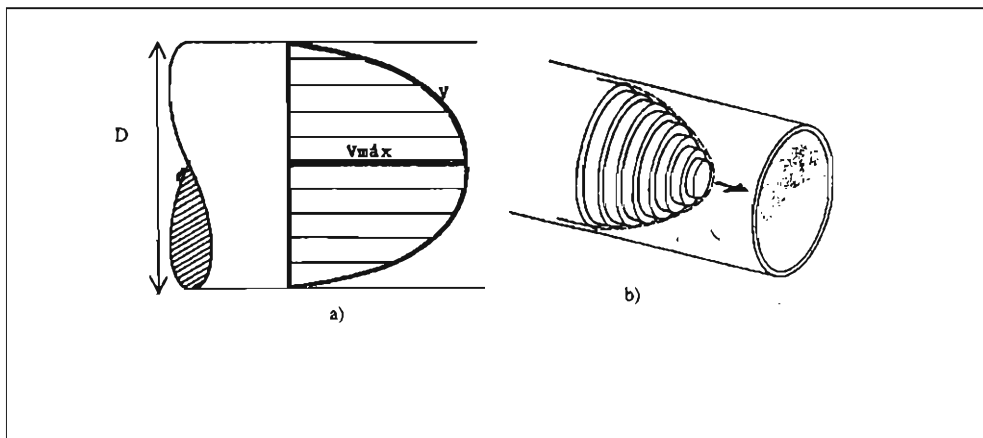


Figura 2.8: Distribución de velocidades en flujo laminar en un tubo a presión. a) Perfil. b) Perspectiva.

$$Q = \int_A v dA$$

Introduciendo la (2.22)

$$Q = \frac{h_f \gamma}{4 L \mu} \int_A (R^2 - r^2) dA$$

Aquí convendrá elegir un dA anular de radio r y ancho dr (figura 2.7.c), con lo cual los límites de integración serán $r = 0$ (eje del tubo) y $r = R$ (borde)

$$Q = \frac{h_f \gamma}{4 L \mu} \int_0^R (R^2 - r^2) 2 \pi r dr$$

Integrando resulta

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{h_f \gamma}{L \mu} R^4$$

O bien, recordando que $R = D/2$

$$Q = \frac{\pi}{128} \frac{h_f \gamma}{L \mu} D^4 \quad (2.24)$$

Para obtener la velocidad media debe dividirse el gasto por el área

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{\pi/128 \frac{h_f \gamma}{L \mu} D^4}{\pi D^2/4}$$

$$U = \frac{1}{32} \frac{h_f \gamma}{L \mu} D^2 \quad (2.25)$$

Si se compara esta ecuación con la 2.23 se aprecia que

$$U = \frac{1}{2} V_{\max} \quad (2.26)$$

Otras cantidades que pueden obtenerse con estas fórmulas son los coeficientes de Boussinesq, β , y de Coriolis, α ; efectivamente, reemplazando la fórmula 2.22 en las 1.18 y 1.23, se obtiene respectivamente

$$\beta = 1.33 \quad \text{y} \quad \alpha = 2$$

valores que ya fueron anticipados en el apartado 1.3.2 pero que ahora se confirman analíticamente.

Pero en definitiva, la fórmula más interesante es la 2.25; si de ella se despeja la pérdida h_f resulta

$$h_f = \frac{32 \mu U L}{\gamma D^2} \quad (2.27)$$

Esta es la *ecuación de Hagen – Poiseuille* y, como se aprecia, cumple uno de los principales objetivos de esta sección, el de evaluar la pérdida h_f en función de las variables geométricas (D , L) y cinemáticas (U) del flujo así como de las propiedades del líquido (μ , γ). Puede observarse también que esta ecuación es coherente con la experiencia de Hagen comentada al principio del punto 2.2, según la cual la pérdida es proporcional a la media cuando el flujo es laminar. La expresión 2.24 también es otra forma práctica de esta ecuación; si de ella se despeja la pérdida se obtiene

$$h_f = \frac{128 \mu Q L}{\pi \gamma D^4} \cong 40.7 \frac{\mu Q L}{\gamma D^4} \quad (2.28)$$

Esta fórmula servirá para calcular la pérdida cuando se conozca el gasto sin calcular previamente la velocidad media; pero además pone de manifiesto algo muy importante que es la sensibilidad de la pérdida con el diámetro, puede verse que h_f es inversamente proporcional a la cuarta potencia de D ; de manera que si a igualdad del gasto, el diámetro se reduce a la mitad, por ejemplo, la pérdida aumenta 16 veces; como se verá más adelante, esta situación es aún más marcada en flujo turbulento.

Si se recuerda que la viscosidad cinemática es $\nu = \mu/\rho$ y que el peso específico es $\gamma = \rho g$, las ecuaciones 2.27 y 2.28 también podrán expresarse en las formas siguientes

$$h_f = \frac{32 \nu U L}{g D^2} \quad (2.29)$$

$$h_f = \frac{128 \nu Q L}{\pi g D^4} \quad (2.30)$$

Naturalmente que la ecuación de Hagen – Poiseuille debe ser coherente con la fórmula de Darcy – Weisbach 2.11, ya que esta última es más general que aquella. Esto se demostrará a continuación: En la 2.29 se multiplica y divide por $2U$

$$h_f = \frac{64 U \nu U L}{2 U g D^2}$$

simplificando y reagrupando las variables

$$h_f = 64 \frac{\nu}{U d} \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

Pero $\frac{\nu}{UD} = \frac{1}{Re}$ (ecuación 2.7); por lo tanto

$$h_f = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

Si se compara esta expresión con la (2.11) se deduce que

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (\text{régimen laminar}) \quad (2.31)$$

Efectivamente se cumple lo que señala el análisis dimensional: el factor de fricción es función del número de Reynolds y la rugosidad relativa; en este caso sólo del número de Reynolds; en flujo laminar la rugosidad no tiene influencia en la resistencia al flujo; la disipación de energía se debe al rozamiento de las partículas líquidas entre sí y es función directa de la viscosidad.

Problema resuelto 2.1 Flujo laminar. Un tubo de 25 mm de diámetro transporta un aceite de viscosidad $\mu = 0.117 \text{ kg/ms}$ y densidad relativa $\delta = 0.9$ (figura 2.9). Calcular la velocidad media del flujo y el gasto.

Solución. Se empieza por aplicar la ecuación de conservación de la energía entre las secciones 1 y 2; por ser un tubo de diámetro constante, resulta $U_1 = U_2$ y la ecuación puede aplicarse en su forma (1.31)

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) h_{f_{1-2}} \quad (2.32)$$

El peso específico γ de este aceite se calcula multiplicando su densidad relativa por el peso específico del agua

$$\gamma_{\text{aceite}} = \delta_{\text{aceite}} \times \gamma_{\text{agua}}$$

$$\gamma = 0.9 \times 9,800 \text{ N/m}^3 = 8,820 \text{ N/m}^3$$

Reemplazando en la (2.23) este valor y otros obtenidos de la figura, resulta

$$h_f = \left(12 \text{ m} + \frac{180,000 \text{ Pa}}{8,820 \text{ N/m}^3} \right) - \left(10.5 + \frac{130,000}{8,820} \right) \text{ m}$$

Resolviendo

$$h_f = 7.17 \text{ m}$$

Conociendo este valor, puede calcularse la velocidad media de flujo U , sustituyendo en la ecuación de Hagen – Poiseuille en su forma 2.25, suponiendo que el flujo es laminar

$$U = \frac{1}{32} \times \frac{7.17 \text{ m} \times 8,820 \text{ N/m}^3 \times (0.025 \text{ m})^2}{12 \text{ m} \times 0.117 \text{ kg/ms}} = 0.88 \text{ m/s}$$

Ahora es preciso *verificar que el flujo es laminar*, para confiar en que la ecuación adopta es la correcta. Para ello debe calcularse la viscosidad cinemática ν del aceite

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{\delta \rho_{agua}} = \frac{0.117 \text{ kg/ms}}{0.9 \times 1,000 \text{ kg/m}^3} = 1.3 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{U D}{\nu} = \frac{0.88 \text{ m/s} \times 0.025 \text{ m}}{1.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}} = 169$$

Efectivamente por ser $\text{Re} < 2,200$, el flujo laminar y los valores obtenidos son correctos. Finalmente el gasto se obtiene por la ecuación de continuidad

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U = \frac{\pi (0.025 \text{ m})^2}{4} \times 0.88 \text{ m/s} = 4.32 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0.432 \text{ l/s}$$

En el apartado 1.3.2 se comentó que en el flujo laminar las velocidades son muy bajas y por lo tanto la energía cinética es despreciable. Este problema puede servir de ejemplo para respaldar esa afirmación. La energía cinética en flujo laminar es

$$Ec = \alpha \frac{u^2}{2g}$$

Se ha demostrado en este mismo apartado que en una tubería circular con flujo laminar es $\alpha = 2$; reemplazando este valor y el de la velocidad media

$$Ec = 2 \times \frac{(0.88 \text{ m/s})^2}{19.6 \text{ m/s}^2} = 0.079 \text{ m}$$

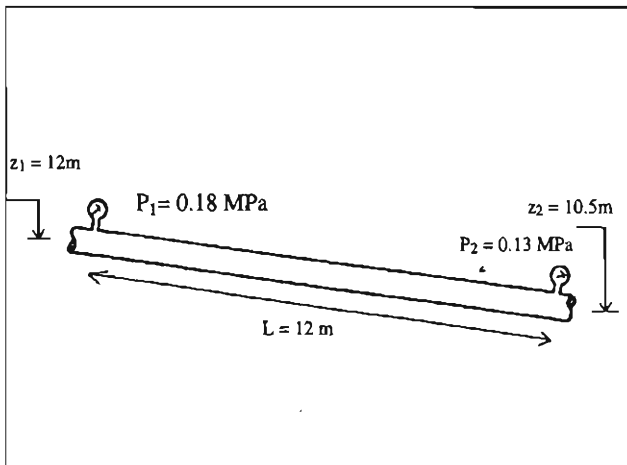


Figura 2.9: Problema resuelto 2.1.

Como se puede apreciar, este valor es insignificante comparado con otros de la ecuación de la energía y en especial con la pérdida que es casi cien veces mayor. En este problema, las líneas de energía total y piezométrica serán prácticamente coincidentes.

2.4 Flujo turbulento

Cuando una corriente viscosa se vuelve inestable los remolinos resultantes se propagan con rapidez por todo el flujo. El resultado es un movimiento complejo, en el cual la velocidad varía constantemente en el tiempo. Este fenómeno se conoce como *turbulencia* y sus principales efectos son los que se describen a continuación:

- Las trayectorias líquidas son irregulares, una misma partícula puede ocupar distintos niveles dentro del flujo; esto es lo que facilita la mezcla y explica el resultado de la experiencia de Reynolds en la que un colorante se difunde a poca distancia de la boquilla. De igual manera que un colorante, la propia energía de las partículas se difunde con facilidad; las partículas con menos energía cinética, cercanas al borde, se desplazan al centro por efecto de la turbulencia y recíprocamente las del centro se trasladan al borde. Esto hace que la distribución de velocidades en el flujo turbulento (figura 2.10.a) sea mucho más uniforme que en el laminar, excepto en una franja pequeña cercana al borde en la que el gradiente de velocidades es muy fuerte; esto es lógico porque en los contornos el movimiento de los remolinos se reduce a un mínimo debido a la falta de espacio y además debe cumplirse el principio de Meier de velocidad nula en contacto con el sólido.
- Debido a la mezcla, la fricción entre las partículas aumenta y por lo tanto se incrementa el grado de disipación de energía; esto se puede observar en la experiencia de Hagen (figura 2.3); cuando el flujo se hace turbulento la pendiente de la curva pérdida-velocidad aumenta notablemente.

Como se dijo al principio, si se mide la velocidad en un punto cualquiera del flujo, se observará que ésta es variable con respecto al tiempo; el registro será parecido al de la figura 2.10.b. Sin embargo, si el gasto es permanente, el valor de la velocidad oscilará alrededor de un promedio que se llama *velocidad media temporal* \bar{V} . Bazin demostró que si esa velocidad media se calcula para distintos intervalos de tiempo pero todos ellos mayores que 2 minutos, entonces todos los promedios que se obtengan serán esencialmente iguales. De manera que la velocidad en un punto cualquiera de la corriente puede separarse en dos componentes (figura 2.10.c): la velocidad media temporal \bar{V} , que es constante con el tiempo y conserva la dirección general de la corriente y una componente turbulenta que es variable, aleatoria y que además puede asumir cualquiera de las direcciones del espacio.

Al ser el flujo turbulento tan complejo en su propia naturaleza, su análisis teórico es particularmente complicado y su carácter aleatorio obliga a echar mano de la *mecánica estadística*. Basándose en los resultados obtenidos por Bazin, Boussinesq propuso un modelo para el estudio del movimiento turbulento, que consiste en reemplazar la velocidad real en cada punto por la velocidad media temporal. A este campo de velocidades ficticio se lo llama *movimiento medio local de Boussinesq* y sus principales simplificaciones consisten en haber reemplazado una velocidad variable por una velocidad permanente y un flujo de trayectorias quebradas por otro unidimensional. De esta manera se respetan las hipótesis restrictivas con las que se ha venido trabajando.

Sin embargo, no hay que perder de vista que el movimiento medio local de Boussinesq es ficticio; las ecuaciones de conservación se seguirán cumpliendo en sus expresiones integrales simplificadas pero no ocurrirá lo mismo con la ecuación de Newton de viscosidad 2.15, que es de tipo diferencial. Esta ley seguirá siendo cierta para el campo real de velocidades pero no para el de velocidades medias temporales. Esto

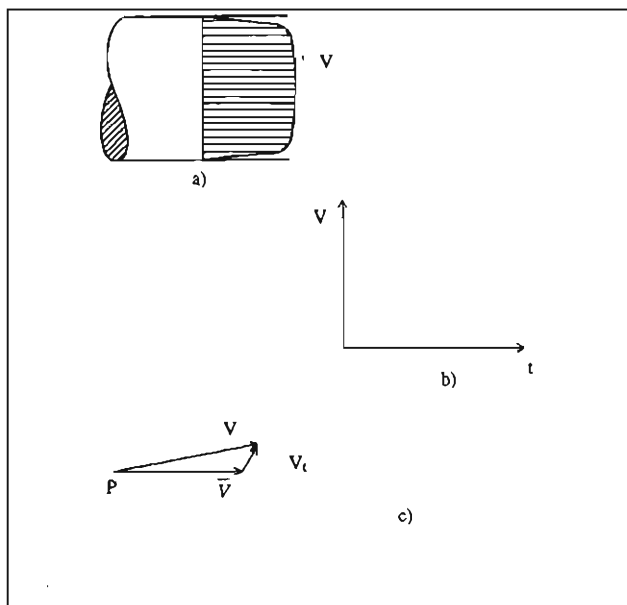


Figura 2.10: Flujo turbulento. a) Perfil de velocidades en un tubo a presión. b) Registro de la velocidad instantánea en un punto del campo de flujo en función del tiempo. c) Descomposición de la velocidad instantánea V en una media temporal \bar{V} y una componente turbulenta V_t .

representa una desventaja para el análisis del problema, ya que se cuenta con una ecuación menos y por lo tanto el factor de fricción ya no podrá deducirse en forma teórica como en el caso de flujo laminar. Es necesario, por lo tanto, apoyarse en nuevos resultados experimentales para encontrar la solución.

2.4.1 Ecuación de Coolebrook y White

Los trabajos encaminados al estudio de la turbulencia y las resistencias en flujo turbulento ocupan buena parte del desarrollo reciente de la hidráulica. Fue el científico alemán Prandtl quien, a principios de siglo, estableció las bases de la moderna mecánica de los fluidos al reconocer que la resistencia viscosa en los flujos turbulentos sólo tiene influencia apreciable en las inmediaciones del contorno sólido. Sus discípulos von Kármán y Nikuradse hicieron también, por su parte, valiosos aportes; el primero al estudiar las características del flujo turbulento en las proximidades de contornos planos y el segundo al estudiar y cuantificar la resistencia al flujo en tuberías lisas y rugosas. Nikuradse trabajó con tuberías de rugosidad uniforme, similar a la que se aprecia en la figura 2.2.b; para ello se valió del recurso de revestir interiormente tubos lisos con granos de arena de tamaño clasificado. El desarrollo y los resultados de los trabajos de estos tres investigadores, pueden consultarse en las referencias [10], [11] y [12] y, de manera más sintética y accesible, en el capítulo VII de la referencia [13] o en el apéndice B de la [9].

Coolebrook y White, basándose en los trabajos de Nikuradse, hicieron un estudio similar pero esta vez en tuberías revestidas interiormente con granos de arena de tamaño variado; la rugosidad resultante no es uniforme sino dispareja, parecida a la que se observa en tuberías comerciales (figura 2.2.a), que en definitiva es lo que interesa desde el punto de vista práctico. No es extraño entonces que la fórmula de Coolebrook y White, obtenida con rugosidad artificial, sea adecuada también para tuberías comerciales, de rugosidad natural; así lo demuestran las experiencias realizadas por Freeman, Heywood y otros con tubos de hierro fundido, acero galvanizado y acero soldado entre otros materiales. Dicha fórmula es la que se incluye a continuación y es la que permite evaluar el factor de fricción f en *flujo turbulento*

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} + 0.269 \frac{\epsilon}{D} \right) \quad (2.33)^4$$

Algunos comentarios que se pueden hacer sobre esta ecuación son los siguientes:

- Efectivamente esta fórmula es coherente con lo que señala el análisis dimensional (ecuación 2.10) ya que el factor de fricción es una función del número de Reynolds Re y de la rugosidad relativa ϵ/D .
- Es algo complicada de manejar, ya que el factor de fricción no sólo aparece en el primer miembro sino también en el segundo y dentro del argumento de un logaritmo, por lo tanto es imposible de despejar en forma explícita. Por supuesto este problema se puede solucionar, tanto gráfica como numéricamente, lo que se verá más adelante.
- Finalmente, faltaría hacer un comentario sobre la rugosidad ϵ . Si es cierto que se trata de una rugosidad no uniforme, entonces ¿cuál de todos los valores que asume ésta en el *paisaje montañoso* de la figura 2.2.a es el que debe asignarse a su valor en la fórmula? Una respuesta razonable sería tomar la altura promedio de la rugosidad, pero como se verá, hay otro criterio más correcto que ese; sin embargo, antes de hacer referencia a él, es conveniente explicar con algo más de detalle el mecanismo de disipación de energía en flujo turbulento.

2.4.2 Tubos lisos y rugosos

De acuerdo al perfil de flujo de la figura 2.10.a, conforme se avanza hacia el borde sólido, las velocidades son cada vez más bajas. Dentro de un pequeño espesor de fluido adyacente a dicho borde, la velocidad será lo bastante baja para que el flujo en él sea laminar; a esa delgada capa se le da el nombre de *subcapa laminar* (figura 2.11) y se llamará δ al espesor de la misma. El flujo principal seguirá siendo turbulento pero dentro de ese espacio pegado al contorno se mantendrá el régimen laminar. ¿De qué depende el valor del espesor δ ? o, si se prefiere, ¿de qué depende la relación δ/D entre el espesor de la subcapa laminar y el diámetro? Obviamente del número de Reynolds; entre más turbulento sea el flujo, menor será la importancia relativa de la subcapa laminar.

La figura 2.11 corresponde a una tubería completamente lisa, pero ¿qué ocurre si la superficie es rugosa? Al respecto se presentan tres posibilidades:

⁴ De aquí en adelante, cuando se escriba \log se entenderá logaritmo decimal, reservándose el símbolo \ln para logaritmo natural.

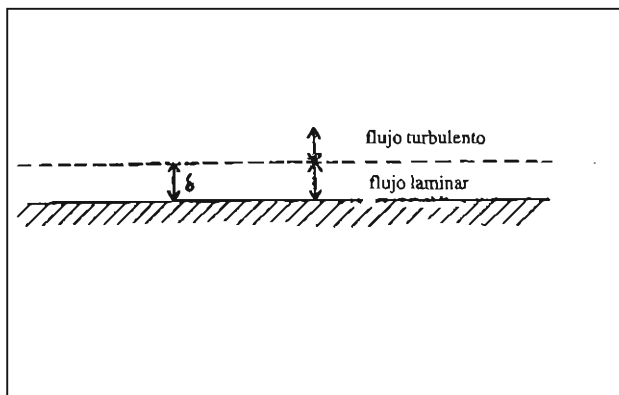


Figura 2.11: Subcapa laminar junto al contorno liso de un flujo completamente desarrollado en un tubo a presión

- a) Que el espesor de la rugosidad sea mucho menor que el espesor de la subcapa laminar (figura 2.12.a). En este caso la rugosidad influirá muy poco en la resistencia al flujo, ya que prácticamente no perturba las trayectorias laminares y con mayor razón puede afirmarse que tampoco influye en el *núcleo turbulento*, que se observa fuera del espesor de la subcapa.

Este es el caso de una *tubería lisa* o, más precisamente, *hidráulica lisa*, porque aunque tenga rugosidad, ésta es indiferente al flujo. Las pérdidas de energía en esta tubería se deben a la fricción entre las propias partículas líquidas, principalmente en el espesor de la subcapa laminar donde el gradiente de velocidades es muy fuerte. Si la rugosidad es pequeña también lo será la relación ϵ/D y en el paréntesis de la 2.33 el segundo término será pequeño, inclusive despreciable comparado con el primero, de manera que la ecuación podrá escribirse así

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (2.34)$$

(flujo turbulento – tubos lisos)

Esta fórmula coincide con la ecuación de Kármán – Prandtl para el factor de fricción en tubos lisos, que históricamente es anterior a la fórmula de Coolebrook – White y puede afirmarse que es el límite de esta última cuando la rugosidad relativa ϵ/D tiende a cero. Gráficamente, esto se puede apreciar en la figura 2.13.

- b) La segunda posibilidad es que la rugosidad sea mucho mayor que el espesor de la subcapa laminar (figura 2.12.b). Aquí ocurrirá la situación opuesta a la del inciso anterior; la subcapa laminar se encontrará perdida entre los intersticios de la rugosidad y ésta estará en contacto directo con el núcleo turbulento, que deberá abrirse paso entre las irregularidades de la superficie sólida. Se dice normalmente que en este caso las resistencias al flujo se deben a la fricción entre las partículas líquidas y el contorno. En realidad el fenómeno es un poco más complicado que eso; simplemente de acuerdo al principio de

Meier, una partícula líquida adyacente a una superficie sólida permanece fija con respecto a ella, o sea que no puede deslizarse. Lo que en realidad ocurre es que la rugosidad provoca pequeños torbellinos en el flujo, como se esquematiza en la figura 2.14; éstos son la causa de la disipación de energía ya que cada torbellino representa un incremento localizado de la turbulencia. Sin embargo, desde un punto de vista macroscópico, hablar de fricción entre el líquido y el contorno se puede aceptar como correcto. El caso presentado en este inciso corresponde a una *tubería rugosa* o mejor dicho, *netamente rugosa* o con *turbulencia plenamente desarrollada*; este tipo de precisiones se hace a veces necesario porque, por una cuestión semántica, lo que no es liso es rugoso; de manera que esta última palabra no sólo incluye el presente caso sino también el del inciso c) que se presentará en seguida; decir en cambio que la tubería es netamente rugosa o que el flujo es plenamente turbulento, enfatiza el hecho de que la subcapa laminar no influye en la resistencia al flujo. Como se ha dicho al principio de este apartado, para que la subcapa laminar sea pequeña, el número Reynolds debe ser grande y por lo tanto esta vez será el primer término de la 2.33 el que podrá despreciarse frente al segundo; la ecuación resultante es

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(0.269 \frac{\epsilon}{D} \right) \quad (2.35)$$

(Turbulencia plena)

que coincide con la ecuación de Kármán – Prandtl para tubos rugosos y es límite de la de Coolebrook y White cuando el número de Reynolds tiende a infinito; esto se aprecia también en la figura 2.13.

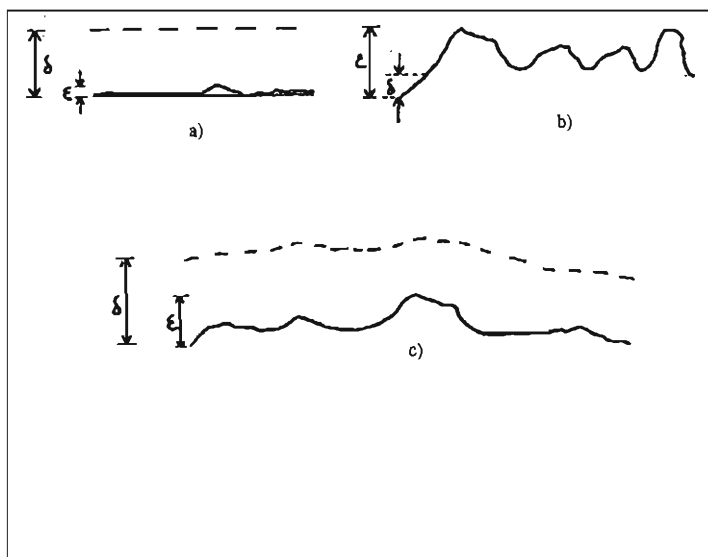


Figura 2.12: Subcapa laminar en tubos rugosos. a) su espesor es mucho mayor que la rugosidad. b) su espesor es mucho menor que la rugosidad. c) ambos son del mismo orden de magnitud.

c) Finalmente, la última posibilidad es el caso intermedio, en el que no existe un neto predominio de δ sobre ϵ ni viceversa; ambos valores tienen el mismo orden de magnitud (figura 2.12.c). Aquí tanto la rugosidad como la viscosidad tendrán influencia en las pérdidas por fricción. Es naturalmente el caso más general y no podrá despreciarse ninguno de los dos términos del paréntesis de la 2.33. En la figura 2.13 este caso está representado por la curva de transición de Coolebrook y White que une las dos rectas extremas que representan a las ecuaciones de Kármán – Prandtl.

Ahora bien, en la misma figura 2.13 existe otra curva de transición llamada de Nikuradse. ¿Cuál es la diferencia entre ésta y la de Coolebrook y White? Como se recordará, Nikuradse realizó sus experiencias con tubos de rugosidad uniforme mientras que los otros dos investigadores emplearon rugosidades compuestas. La experiencia demuestra que la respuesta del flujo en uno y otro caso es diferente; en tubos uniformemente rugosos la condición de tubo liso se mantiene para números de Reynolds más altos, mientras que para rugosidad compuesta la transición empieza antes y es continuamente decreciente. Obviamente es la curva de Coolebrook y White la que verdaderamente interesa por su mejor aproximación al comportamiento de las tuberías comerciales; sin embargo su comparación con la de Nikuradse va a servir para resolver una cuestión cuya respuesta sigue pendiente, la de adoptar un valor de ϵ que represente a la rugosidad de una tubería comercial. En efecto, como puede apreciarse, ambas curvas de transición coinciden a la derecha de la gráfica en la zona de turbulencia plena con la ecuación de Kármán – Prandtl para tubos rugosos; esto sugiere que el valor de la rugosidad uniforme ϵ de la curva de Nikuradse podría adoptarse también para representar a la rugosidad compuesta de la curva de Coolebrook y White. Este concepto es el que se conoce como rugosidad equivalente y que, sintetizando lo dicho, podría definirse de la siguiente manera:

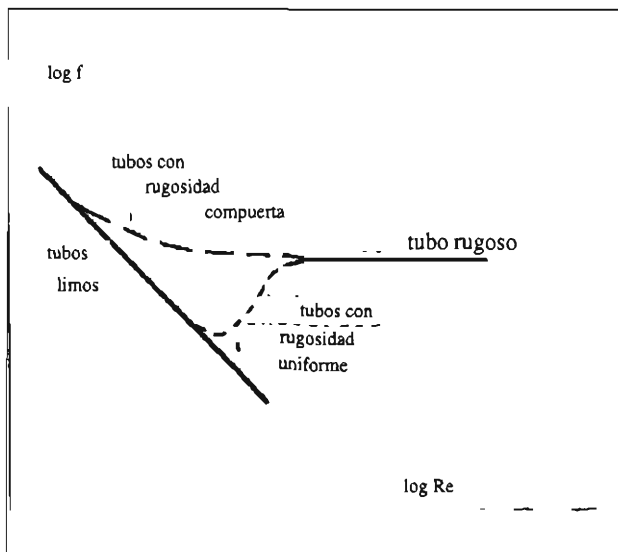


Figura 2.13: Variación del factor de fricción f con el número de Reynolds para tubos lisos y rugosos. En la transición la curva es diferente según que se trate de tubos con rugosidad uniforme (experiencias de Nikuradse) o de rugosidad compuesta, que es lo que más se asemeja a tubos comerciales.

Se llama **rugosidad equivalente** de una tubería comercial al valor de la rugosidad artificial uniforme que, a igualdad de las demás condiciones del flujo, provoca la misma pérdida primaria en régimen de turbulencia plena.

De manera que para obtener la rugosidad equivalente de un cierto material, acero galvanizado por ejemplo, deberá compararse la pérdida primaria medida en un tramo de tubería del mismo con la de varios tubos del mismo diámetro y longitud y en las mismas condiciones de flujo; estos tubos deben ser lisos pero revestidos interiormente con granos de arena de tamaño uniforme; con alguno de ellos se obtendrá la misma pérdida que en el de acero galvanizado en régimen de turbulencia plena; el diámetro de la arena que reviste interiormente ese tubo será el valor de la rugosidad equivalente del acero galvanizado, que resulta ser de

$$\varepsilon = 0.15 \text{ mm}$$

En los manuales y textos de hidráulica (referencia [9] y [14] por ejemplo) el lector puede encontrar abundante información sobre la rugosidad equivalente de distintos materiales comerciales. Una lista bastante completa se presenta aquí en la tabla 2.1.

2.4.3 Envejecimiento de la tubería

La rugosidad de un cierto material dependerá, obviamente, de la naturaleza del mismo y del cuidado que se tenga en el acabado de la tubería. Por ejemplo, un tubo de PVC es menos rugoso que uno de concreto pero a su vez el concreto centrifugado es más liso que el colado en cimbras de madera. También tiene su influencia lo que se conoce como *efecto de juntas*; en un tubo con uniones soldadas, por ejemplo, la costura provocará una discontinuidad localizada que hará que el tubo sea más rugoso cuanto menor sea la separación entre juntas; algo parecido puede decirse de las uniones de macho y campana, a rosca, remachadas o a bridas; en este último caso por ejemplo, el efecto de la junta sobre la rugosidad es casi nulo ya que puede lograrse una alineación casi perfecta. En la propia tabla 2.1 para algunos materiales se especifican distintas rugosidades dependiendo del tipo de unión.

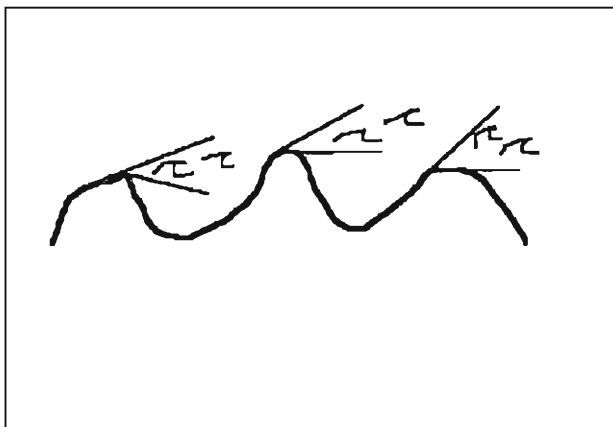


Figura 2.14: Remolinos provocados por la rugosidad en flujos con turbulencia plenamente desarrollada.

Tabla 2.1

Rugosidad absoluta ϵ de algunos materiales

Material	ϵ (mm)
Tubos lisos	
De vidrio, cobre, latón, madera (bien cepillada), acero nuevo soldado y con una mano interior de pintura; tubos de acero de precisión sin costura, serpentines industriales, plástico, hule	0.0015
Tubos industriales de latón	0.025
Tubos de madera	0.2 a 1
Fierro forjado	0.05
Fierro fundido nuevo	0.25
Fierro fundido, con protección interior de asfalto	0.12
Fierro fundido oxidado	1 a 1.5
Fierro fundido, con incrustaciones	1.5 a 3
Fierro fundido, centrífugo	0.05
Fierro fundido nuevo, con bridas o juntas de macho y campana	0.15 a 0.3
Fierro fundido usado, con bridas o juntas de macho y campana	
Fierro fundido para agua potable con bastantes incrustaciones y diámetro de 50 a 125 mm	2 a 3.5
Fierro galvanizado	1 a 4
Acero rolado, nuevo	0.15
Acero laminado, nuevo	0.05
Acero laminado con protección interior de asfalto	0.04 a 0.1
	0.05
Tubos de acero soldado de calidad normal	
Nuevo	0.05 a 0.10
Limpiado después de mucho uso	0.15 a 0.20
Moderadamente oxidado, con pocas incrustaciones	0.4
Con muchas incrustaciones	3
Con remaches transversales, en buen estado	0.1
Con costura longitudinal y una línea transversal de remaches en cada junta, o bien laqueado interiormente	0.3 a 0.4
Acero soldado, con líneas transversales de remaches, sencilla o doble; o tubos remachados con doble hilera longitudinal de remaches e hilera transversal sencilla, sin incrustaciones	0.6 a 0.7

Tabla 2.1 (continuación)

Material	ϵ (mm)
Acero soldado, con una hilera transversal sencilla de pernos en cada junta, laqueado interior, sin oxidaciones, con circulación de agua turbia	1
Acero soldado, con doble hilera transversal de pernos, agua turbia, tuberías remachadas con doble costura longitudinal de remaches y transversal sencilla, interior asfaltado o laqueado	1.2 a 1.3
Acero soldado, con costura doble de remaches transversales, muy oxidado. Acero remachado, de cuatro a seis filas longitudinales de remaches, con mucho tiempo de servicio	2
Tubos remachados, con filas longitudinales y transversales	
a) Espesor de lámina < 5 mm	0.65
b) Espesor de lámina de 5 a 12 mm	1.95
c) Espesor de lámina > 12 mm, o entre 6 y 12 mm, si las hileras de pernos tienen cubrejuntas	3
d) Espesor de lámina > 12 mm con cubrejuntas	5.5
Tubos remachados, con cuatro filas transversales y seis longitudinales con cubrejuntas interiores	4
No metálicos	
Asbesto-cemento nuevo	0.025
Asbesto-cemento, con protección interior de asfalto	0.0015
Concreto centrifugado, nuevo	0.16
Concreto centrifugado, con protección bituminosa	0.0015 a 0.125
Concreto en galerías, colado con cimbra normal de madera	1 a 2
Concreto en galerías, colado con cimbra rugosa de madera	10
Concreto armado en tubos y galerías, con acabado interior cuidadosamente terminado a mano	0.01
Concreto de acabado liso	0.025
Conductos de concreto armado, con acabado liso y varios años de servicio	0.2 a 0.3
Concreto alisado interiormente con cemento	0.25
Galerías con acabado interior de cemento	1.5 a 1.6

Tabla 2.1 (continuación)

Material	ϵ (mm)
Concreto con acabado normal	1 a 3
Concreto de acabado rugoso	10
Cemento liso	0.3 a 0.8
Cemento no pulido	1 a 2
Concreto presforzado Freyssinet	0.04
Concreto presforzado Bona y Socoman	0.25
Mampostería de piedra, bien juntada	1.2 a 2.5
Mampostería de piedra rugosa, sin juntar	8 a 15
Mampostería de piedra, mal acabada	15 a 30

Fuente: Referencia [9]

Pero sin duda otro aspecto importante que tendrá su influencia en el valor de la rugosidad es la edad de la tubería. Este problema se conoce globalmente como *envejecimiento* aunque en realidad son varios los aspectos que entran en juego. El más importante y que sin duda ha sido más estudiado por los investigadores, es el de la *corrosión*, que afecta a los tubos de material ferroso; conforme pasa el tiempo, la corrosión hace que aumente la rugosidad ya que su acción sobre el metal no es pareja sino que por el contrario provoca que una superficie inicialmente suave se haga cada vez más irregular; por otro lado, no toda la herrumbre es lavada sino que parte de ella queda pegada, incrementando aún más la aspereza. Desde el punto de vista práctico lo que interesa es saber cómo se modifica el valor de ϵ ; esto va a depender no sólo del tiempo transcurrido sino también del material de la tubería y de la agresividad química del líquido conducido. Al respecto se han propuesto varias fórmulas, de las cuales la más conocida es la de Genijew (referencia [9]), que además es muy sencilla por ser lineal

$$\epsilon_t = \epsilon_o + \alpha t \quad (2.36)$$

donde

ϵ_t es la rugosidad de la tubería en mm al cabo de t años

ϵ_o es la rugosidad de la tubería nueva en mm

α es un coeficiente de envejecimiento, en mm/año

En la tabla 2.2 se presentan los valores que adopta α para aguas de diferente calidad. Otra forma de obtener el valor de ϵ para tuberías viejas consiste directamente en consultar tablas de rugosidad, en las cuales frecuentemente no sólo se reporta la correspondiente a tubería nueva sino también a tubería vieja con diferentes edades; este criterio se ha seguido para algunos materiales en la tabla 2.1.

Tabla 2.2

Coefficiente α para ser usados en la fórmula de Genijew

Líquido conducido	α (mm/año)
Agua con poco contenido de mineral que no origina corrosión. Agua con pequeño contenido de materia orgánica y de solución de hierro	0.005 a 0.055 valor medio: 0.025
Agua con poco contenido de mineral que origina corrosión. Agua que contiene menos de 3 mg/l de materia orgánica y hierro en solución	0.055 a 0.18 valor medio 0.07
Agua que origina fuerte corrosión y con escaso contenido de cloruros y sulfatos (menos de 100 a 150 mg/l). Agua con un contenido de hierro de más de 3 mg/l	0.18 a 0.40 valor medio 0.20
Agua que origina corrosión, con gran contenido de sulfatos y cloruros (más de 500 a 700 mg/l). Agua impura con una gran cantidad de materia orgánica	0.40 a 0.60 valor medio 0.51
Agua con cantidades importantes de carbonatos, pero de dureza permanente, con residuo de 2,000 mg/l	0.6 a más de 1

Fuente: Referencia [9]

Otro factor que modifica la rugosidad de la tubería a lo largo del tiempo son las *incrustaciones*, que se producen en tuberías de cualquier material cuando conducen aguas *duras*, es decir con alto contenido de ciertas sales, específicamente carbonatos, bicarbonatos, sulfatos o nitratos de calcio o magnesio. Aquí el problema llega a ser más serio porque no sólo se modifica la aspereza sino que, cuando el problema se agudiza, se reduce apreciablemente el diámetro interior de la tubería. En estos casos deben tomarse generosos márgenes de seguridad en el cálculo, a menos que se prevea algún tipo de mantenimiento para remover las incrustaciones o un tratamiento de *ablandamiento* al agua antes de ser conducida.

Finalmente, otros factores que pueden modificar la rugosidad, aunque menos frecuentes, son la *erosión*, en el caso de líquidos con arenas en suspensión a alta velocidad; el *azolve*, que al igual que las incrustaciones también reduce el área efectiva y fenómenos de *naturaleza biológica* como lo son fijaciones de especies animales o vegetales en las paredes de la conducción.

2.5 Diagrama de Moody

Como ya se ha dicho, la fórmula de Coolebrook y White resulta algo complicada de manejar porque el factor de fricción aparece en ambos miembros. Algunos investigadores se preocuparon por obtener fórmulas aproximadas en las cuales f aparezca completamente despejado. La siguiente es una de ellas:

$$f = \frac{1.325}{\left[\ln \left(0.27 \frac{\epsilon}{D} + 5.74 \frac{1}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (2.37)$$

(válida para $10^{-6} < \epsilon/D < 10^{-2}$ y $5000 < Re < 10^8$) [2]

... o esta otra de tipo exponencial

$$f = 0.11 \left[\frac{\epsilon}{D} + \frac{68}{Re} \right]^{1/4} \quad [15] \quad (2.38)$$

El grado de aproximación de estas fórmulas es variable pero generalmente suficiente para casos de aplicación. En la tabla 2.4 se incluyen algunas más, con diferentes rangos de validez.

Otro recurso para resolver problemas prácticos sin la complejidad de manejar aquella fórmula analíticamente es mediante una representación gráfica de la misma. Tal gráfica *es el diagrama de Moody o diagrama universal para el cálculo de tuberías* [17] que se representa en la figura 2.15. Esta carta está organizada de la siguiente manera: en el eje horizontal se representa el número de Reynolds en escala logarítmica y dentro del plano, en trazo grueso, se representa una curva para cada valor de ϵ/D . Por último, en el eje vertical, se representa el factor de fricción f , también en escala logarítmica. Para obtener el factor de fricción en un problema determinado basta encontrar el número de Reynolds en el eje horizontal, avanzar verticalmente hasta la curva de ϵ/D y finalmente en el eje de la derecha se lee el valor de f . Este diagrama permite no sólo calcular tuberías en régimen turbulento, ya que nada impide incluir en él la ecuación 2.31, que evalúa el factor de fricción en régimen laminar; ésta es la recta de pendiente negativa que se observa a la izquierda de la figura para números de Reynolds menores que 2,200.

A continuación se darán algunos ejemplos del manejo del diagrama, lo cual al mismo tiempo servirá para distinguir las zonas en las que se divide, correspondientes a los distintos tipos de flujo que se describieron en los apartados anteriores. Estos ejemplos se representan en la figura 2.16.

- a) Para número de Reynolds $Re = 1,100$ el *flujo es laminar* y el factor de fricción resulta ser de 0.0582; la rugosidad relativa no tiene influencia (Punto A de la figura). Este caso corresponde a la fórmula 2.31.
- b) Para $Re = 15,000$ ($= 1.5 \times 10^4$) y una rugosidad relativa de 0.00004, el flujo es turbulento y el factor de fricción es de 0.0278; la intersección se encuentra en el punto B de la figura, en una curva inferior a la que parecen converger todas las de ϵ/D . Esta curva (llamada a veces de *Blasius*, ver tabla 2.4) representa a los tubos lisos; en efecto, véase que si la rugosidad relativa aumenta hasta 0.00015 o descende a 0.00001 (segmento marcado en el ángulo inferior derecho de la figura), el factor de fricción no varía. Este caso corresponde a la fórmula 2.34.
- c) Para un $Re = 800,000$ ($= 8 \times 10^5$) y una rugosidad relativa de 0.015 el factor de fricción es 0.0438 (punto C). En esta zona del diagrama la curva de ϵ/D es una recta horizontal; si el número de Reynolds disminuye a 6×10^4 o aumenta 10^8 (segmento horizontal en la parte inferior de la figura), el factor de fricción no se altera, su valor sólo depende de la rugosidad relativa. Esta área del diagrama es por lo tanto la que corresponde a *turbulencia plena* (fórmula 2.35) y, como se aprecia, comprende un triángulo ubicado en la parte superior derecha de la carta, limitado inferiormente por una nueva, cuya ecuación es, aproximadamente.

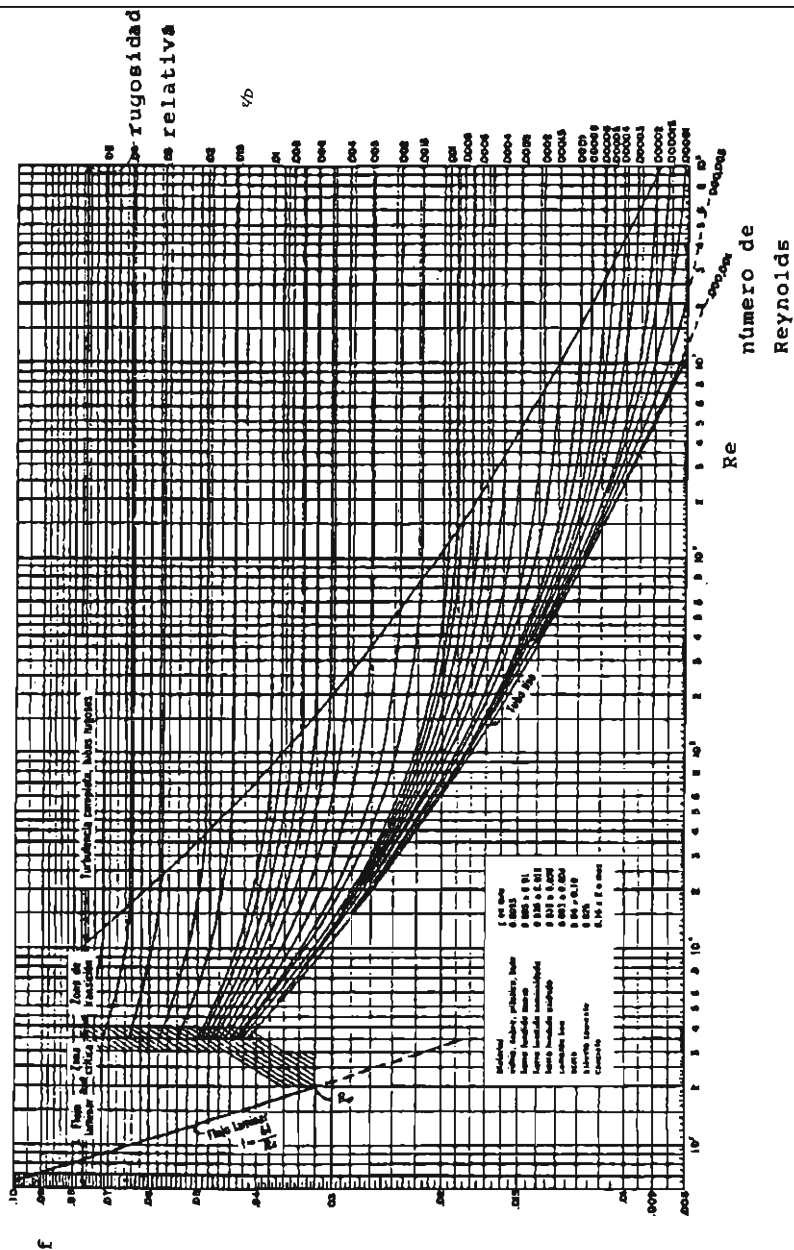


Figura 2.15: Diagrama de Moody.

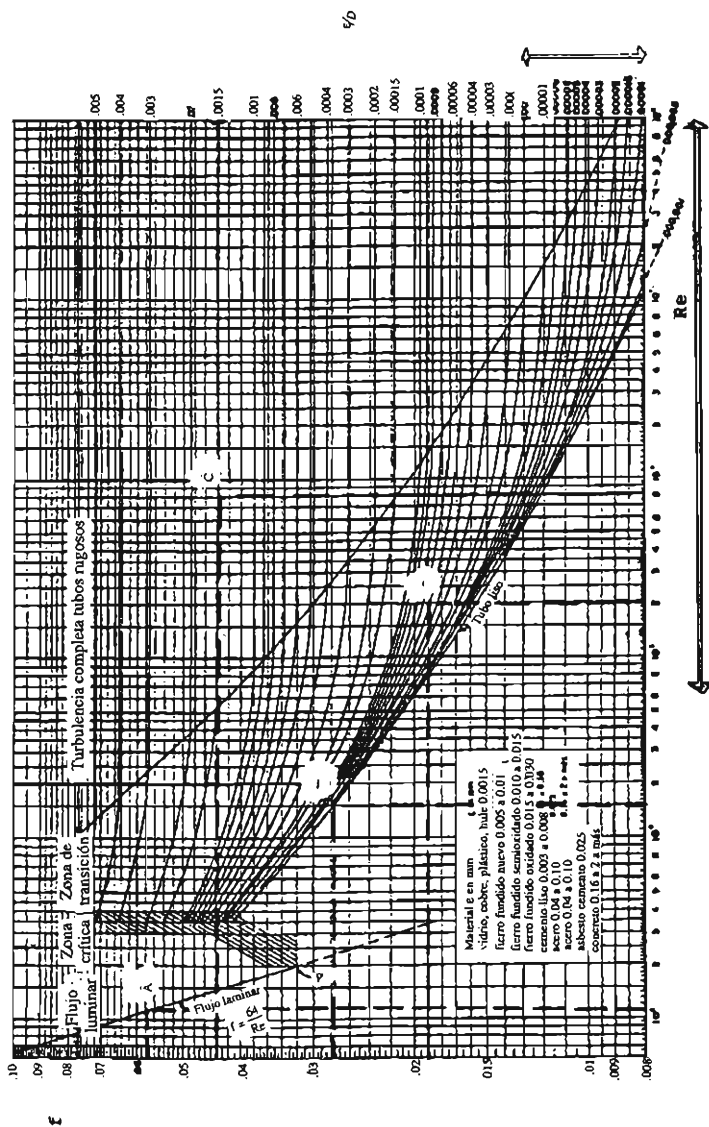


Figura 2.16: Empleo del diagrama de Moody.

$$\text{Re} \sqrt{f} \frac{\epsilon}{D} = 170 \quad 5 \quad (2.39)$$

d) Para $\text{Re} = 200,000$ y $\epsilon/D = 0.0005$ resulta $f = 0.0188$ (punto D). En este caso, una desviación en más o en menos de cualquiera de los dos parámetros, provocará una variación del factor de fricción; ya que tanto la viscosidad representada por ϵ/D , influyen en la resistencia al flujo. Este es el caso más general para tuberías en régimen turbulento, representado por la fórmula de Coolebrook y White 2.33, y abarca una franja que recorre el diagrama en diagonal hacia abajo y hacia la derecha.

2.5.1 Empleo del diagrama

El diagrama de Moody, asociado a la ecuación de Darcy – Weisbach 2.11, es la herramienta que finalmente viene a resolver el principal objetivo de esta sección, la evaluación de la pérdida primaria h_f . Ahora bien, la pérdida no siempre es la incógnita sino que puede ser dato del problema, desconociéndose en cambio alguna otra variable; en cualquier caso, sin embargo, el diagrama y la fórmula mencionados serán útiles para obtener el resultado. A continuación se plantean los tres problemas típicos que pueden presentarse en el cálculo de una tubería y su resolución por medio del diagrama de Moody. En la parte de problemas resueltos de este capítulo se presentan algunos ejemplos.

a) La incógnita es la *pérdida* h_f y son datos: el gasto Q , el diámetro d , la longitud L , la viscosidad del líquido ν y la rugosidad ϵ . Es el caso de una tubería de dimensiones conocidas, por la cual circula un cierto caudal, y se desea conocer la pérdida de carga entre dos secciones. Este problema es el más sencillo y para resolverlo deben seguirse los siguientes pasos:

- i) Se calcula la velocidad media por la ley de continuidad 1.28: $U = 4Q/\pi D^2$
- ii) Se calculan el número de Reynolds $\text{Re} = U D / \nu$ y ϵ/D
- iii) Con estos dos parámetros se extrae el factor de fricción f del diagrama
- iv) Se calcula la pérdida con la fórmula de Darcy – Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

b) La incógnita es el *gasto* Q y los datos son: h_f , D , L , ν y ϵ . Este problema podría llamarse verificación de la capacidad de descarga, conociendo la pérdida y las características de la tubería. Aquí el problema se complica un poco, porque si se desconoce el gasto no podrá conocerse la velocidad media ni tampoco el número de Reynolds, y este parámetro es necesario para obtener el factor de fricción del diagrama. De manera que debe seguirse un procedimiento iterativo:

- i) Se calcula la rugosidad relativa ϵ/D

⁵ En realidad, el valor que se adopte para esta cifra es función de la precisión que se busque en el cálculo de f ; Rouse, por ejemplo (referencia [13]), propone $\text{Re} \sqrt{f} \epsilon/D = 2000$

ii) Se adopta un factor de fricción tentativo $f^{(1)}$, compatible con ϵ/D (Esto significa que debe ser un valor que pertenezca al intervalo *barrido* por la curva de ϵ/D ; si se observa el diagrama se podrá apreciar, por ejemplo, que para una rugosidad relativa de 0.001, el factor de fricción nunca podrá valer menos de 0.0197 ni más de 0.04; no tiene sentido tomar un valor que no esté comprendido entre estos extremos).

iii) Se calcula una velocidad tentativa $U^{(1)}$ despejándola de la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$U^{(1)} = \sqrt{\frac{2g D h_f}{f^{(1)} L}}$$

iv) Se calcula un número de Reynolds, también tentativo,

$$Re^{(1)} = U^{(1)} D / \nu$$

v) Con $Re^{(1)}$ y ϵ/D se regresa al diagrama y se obtiene un nuevo factor de fricción $f^{(2)}$

Seguidamente se repetirán los pasos iii, iv y v pero ahora con $f^{(2)}$ en lugar de $f^{(1)}$ y se seguirá este proceso iterativo hasta que dos factores de fricción sucesivos sean aproximadamente iguales, es decir:

$$f^{(n+1)} \cong f^{(n)}$$

Entonces se adoptará como verdadera la velocidad calculada en último término

$$U = U^{(n)}$$

... y finalmente se calcula el gasto por la ecuación de continuidad 1.27

$$Q = U \pi D^2 / 4$$

A pesar de lo engorroso que parece el procedimiento, normalmente es suficiente un par de iteraciones para lograr una aproximación adecuada.

Sin embargo existe una segunda alternativa para el cálculo del gasto, que no requiere de iteraciones, tampoco del diagrama de Moody, ya que puede resolverse usando directamente la ecuación de Coolebrook

y White. Si en la expresión $Re \sqrt{f}$ se reemplaza $Re = \frac{UD}{\nu}$, y f por su valor en función de la ecuación de Darcy-Weisbach, se obtiene

$$Re \sqrt{f} = \frac{UD}{\nu} \sqrt{\frac{2g D h_f}{L}} \cdot \frac{1}{U} = \frac{D^{3/2}}{\nu} \sqrt{\frac{2g h_f}{L}} \quad (2.40)$$

El lector puede observar que todas las variables que intervienen en el último miembro son función de datos del problema, ya que ha desaparecido la velocidad media que es el valor desconocido. La cantidad $\text{Re} \sqrt{f}$ aparece en el segundo miembro de la ecuación de Coolebrook y White, de manera que reemplazándola podrá calcularse el factor de fricción f . El algoritmo de éste, que podría llamarse método directo para el cálculo del gasto, es el siguiente:

i) Calcular
$$\text{Re} \sqrt{f} = \frac{D^{3/2}}{\nu} \sqrt{\frac{2g h_f}{L}}$$

ii) Calcular f por la ecuación de Coolebrook y White. La expresión explícita es la siguiente:

$$f = \frac{1}{\left[-2 \log \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} + \frac{0.269 \epsilon}{D} \right) \right]^2} \quad (2.41)$$

iii) Calcular la velocidad por la ecuación de Darcy-Weisbach

$$U = \sqrt{\frac{2g D h_f}{fL}} \quad (2.42)$$

iv) Calcular el gasto con la ecuación de continuidad

$$Q = U \pi D^2/4$$

Finalmente debe tomarse una precaución que no debe perderse de vista siempre que existan dudas al respecto, y es la de verificar que el flujo sea turbulento ya que sólo en ese caso será válida la ecuación de Coolebrook y White:

v) Calcular Re y verificar que corresponda a flujo turbulento. De no ser así deberá rehacerse el cálculo a partir del paso ii empleando la ecuación de Hagen – Poiseuille en su forma

$$U = \frac{1}{32} \frac{h_f g}{L \nu} D^2 \quad (2.25)$$

para luego obtener el gasto. Vale la pena señalar que en muchos casos esta verificación no será necesaria, ya que con un poco de experiencia que adquiera el calculista, podrá juzgar si un flujo es laminar o turbulento con la simple observación de los datos del problema.

c) La incógnita es el diámetro D y los datos son: h_f , Q , L , ν y ϵ . Este problema tiene una diferencia sustancial con los dos anteriores y es que aquí se trata de *dimensionar* la tubería mientras que en los

otros el tubo ya tenía dimensiones conocidas y sólo se pedía verificarla. A este tercer caso se le llama, por lo tanto, proyecto o *diseño hidráulico* de la tubería. Aquí el problema es aún más complicado que el del caso b) ya que ahora no sólo se desconoce el número de Reynolds sino que tampoco podrá calcularse la rugosidad relativa, ya que el diámetro interviene en ambos parámetros. De manera que aquí deberá seguirse un proceso iterativo más rebuscado que en el caso anterior. Para ello se definirán dos constantes: C_1 y C_2 , de la siguiente manera: Si en la ecuación de Darcy – Weisbach se reemplaza la velocidad media por su valor en función de la ley de continuidad 1.28 quedará

$$h_f = \frac{fL}{D} \frac{\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2}{2g}$$

$$h_f = \frac{8}{\pi^2 g} \frac{fL Q^2}{D^5} \quad (2.43)$$

Despejando el diámetro

$$D^5 = \frac{8 L Q^2}{\pi^2 g h_f} f$$

En la anterior se reemplaza

$$C_1 = \frac{8 L Q^2}{\pi^2 g h_f} \quad (2.44)$$

resultando:

$$D^5 = C_1 f$$

o bien

$$D = \sqrt[5]{C_1 f} \quad (2.45)$$

Ahora se reemplazará de la misma forma la velocidad media en la expresión del número de Reynolds

$$Re = \left(\frac{4 Q}{\pi D^2} \right) \frac{D}{v}$$

$$Re = \frac{4 Q}{\pi v} \frac{1}{D}$$

llamando

$$C_2 = \frac{4 Q}{\pi v} \quad (2.46)$$

resulta

$$Re = \frac{C_2}{D} \quad (2.47)$$

Como se verá a continuación, las expresiones 2.44 a 2.47 servirán para establecer el algoritmo de cálculo del diámetro para el diagrama de Moody

- i) Se calculan las constantes $C_1 = \frac{8LQ^2}{\pi^2 g h_f}$ y $C_2 = \frac{4Q}{\pi v}$
(Esto puede hacerse perfectamente, ya que ambas son función de datos del problema)
- ii) Se adopta un factor de fricción tentativo $f^{(1)}$ (Esta vez, a diferencia de lo que ocurre cuando se conoce ε/D , no hay ninguna pauta para elegir este valor, puede ser cualquiera del diagrama; una recomendación aceptable podría ser tomar $f^{(1)}$ alrededor de 0.017 si la tubería es lisa, 0.022 si es rugosa y 0.028 si es muy rugosa)
- iii) Se calcula el diámetro (tentativo) $D^{(1)}$ con la 2.45

$$D^{(1)} = \sqrt[5]{C_1 f^{(1)}}$$

- iv) Con este valor se calculan los parámetros ε/D y $Re^{(1)}$ este último con la ecuación 2.47

$$Re^{(1)} = \frac{C_2}{D^{(1)}}$$

- v) Con estos dos valores se va al diagrama y se obtiene un nuevo factor de fricción, que se llamará $f^{(2)}$. A partir de aquí se regresa al paso iii y se sigue el procedimiento en forma iterativa hasta que los factores de fricción de dos tanteos sucesivos sean aproximadamente iguales

$$f^{(n)} \cong f^{(n+1)}$$

Entonces se adopta como verdadero el último diámetro calculado, a este valor se le llamará D_r ya que es un diámetro requerido

$$D_r = D^{(n)}$$

El diámetro que finalmente se adopte será aquel de la escala comercial que sea inmediatamente superior a D_r (por ejemplo, si resulta $D_r = 183 \text{ mm}$, se adopta $d = 8'' = 200 \text{ mm}$).

2.5.2 Formas alternativas del diagrama de Moody

La incomodidad que representan los métodos iterativos para el cálculo del gasto y del diámetro, ha sugerido la posibilidad de modificar el diagrama de Moody de manera de poder calcular estas incógnitas en forma directa. Al respecto se han hecho varias propuestas; dos de ellas se incluyen a continuación.

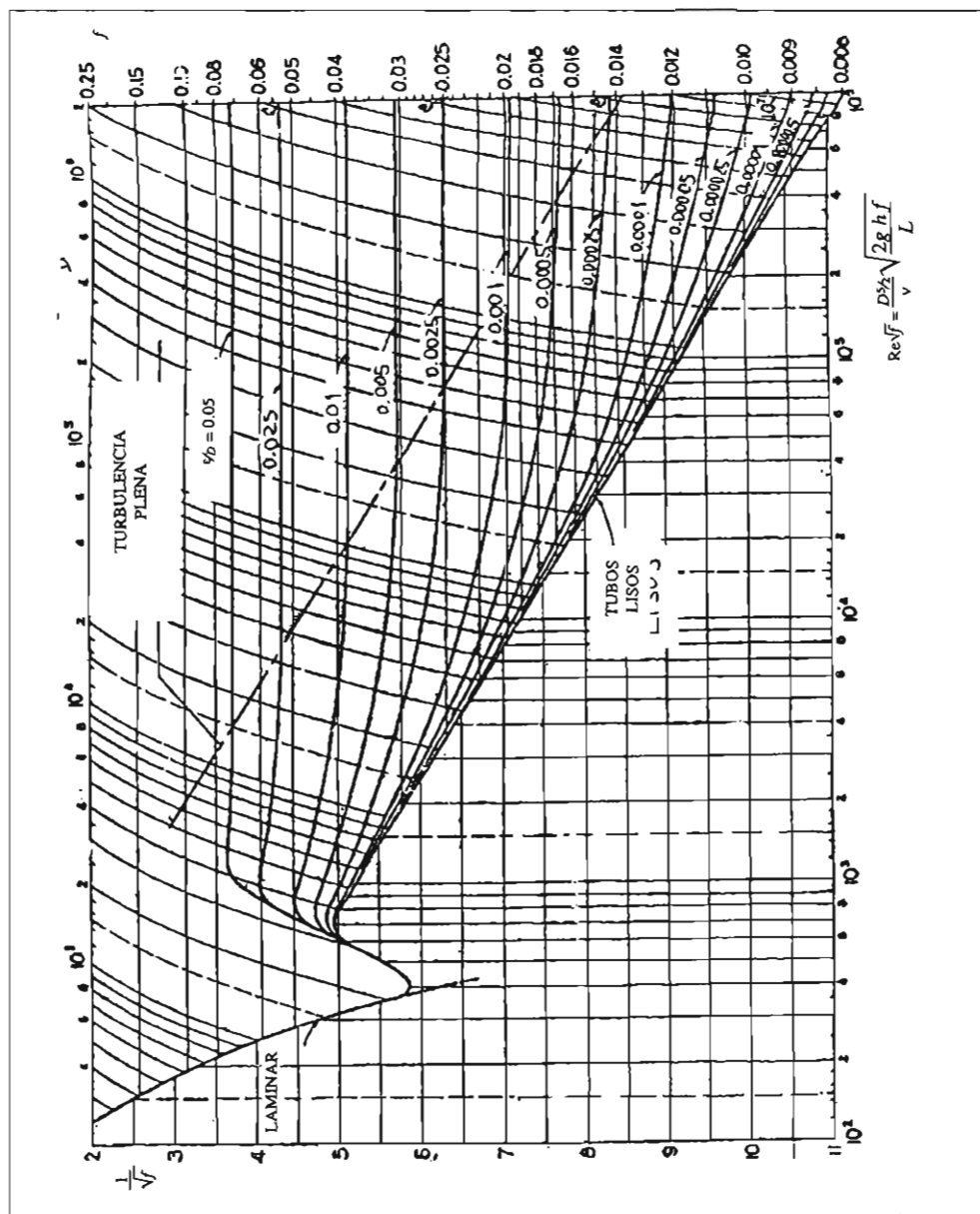


Figura 2.17: Diagrama de Rouse [13] (Las abscisas de $Re\sqrt{f}$ deben prolongarse por encima de la curva de tubos lisos para su intersección con las de ϵ/D).

El diagrama de Rouse [13], que se muestra en la figura 2.17 es muy parecido al original de Moody sólo que la abscisa no es el número de Reynolds sino el parámetro $Re\sqrt{f}$, por lo tanto puede calcularse el gasto siguiendo el método directo explicado al final del inciso b) del apartado anterior; sólo que esta vez no será empleando la fórmula de Coolebrook analíticamente sino en forma gráfica. Por

ejemplo, para un $Re\sqrt{f} = 34,000$ y una rugosidad relativa de 0.0008, se obtiene un factor de fricción $f = 0.020(*)$. Pero también se puede entrar a esta carta con el número de Reynolds, que se observa en la parte superior en unas curvas cóncavas hacia abajo; el mismo punto del ejemplo precedente es el que resulta de combinar un $Re = 240,000$ con la misma rugosidad relativa; de manera que con esta gráfica no se pierde la posibilidad de calcular la pérdida en forma directa.

En la figura 2.18 se representa el **diagrama de Rouse modificado para el cálculo del diámetro**, elaborado por Ivanishevich Machado. En él se agregan dos nuevos parámetros; uno de ellos a la derecha de la gráfica

$$\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^5 f \quad (2.48)$$

Si en esta fórmula se reemplaza f por su valor a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach se obtiene

$$\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^5 \frac{\pi^2 g}{8} \frac{h_f D^5}{Q^2 L}$$

$$\alpha = \frac{\pi^2 g h_f \varepsilon^5}{8 Q^2 L} \quad (2.49)$$

El segundo parámetro se presenta en una familia de curvas ascendentes cóncavas hacia arriba

$$\beta = \frac{Re}{\varepsilon/D} \quad (2.50)$$

En esta fórmula se reemplaza el número de Reynolds en función del gasto como se hizo en el inciso c) del apartado 2.5.1.

$$\beta = \frac{4 Q}{\pi L D \frac{\varepsilon}{D}}$$

o sea que

(*) El factor f se lee a la derecha del diagrama ya que en el eje de la izquierda figura $1/\sqrt{f}$. Las curvas de ε/D están rotuladas.

$$\beta = \frac{4 Q}{\pi \epsilon L} \quad (2.51)$$

El cálculo de α y β con las fórmulas (2.49) y (2.51) puede hacerse directamente con los datos del problema. El punto de intersección de ambos parámetros permite obtener el factor de fricción, el número de Reynolds y la rugosidad relativa. La determinación más precisa del diámetro se obtiene empleando el primero de estos tres valores con la siguiente fórmula (que es equivalente a la 2.45)

$$D = \sqrt[4]{\frac{8 f L Q^2}{\pi^2 g h_f}} \quad (2.52)$$

Este diagrama posee sin duda una estructura bastante compleja por la cantidad de parámetros que incluye, pero precisamente por eso permite el cálculo directo, no sólo del diámetro, sino también de la pérdida y el gasto.

Problema resuelto 2.2 Diagrama de Moody: Cálculo de la pérdida. Un tubo de acero soldado nuevo de 100 mm de diámetro transporta 6.5 l/s de agua a 10°C de temperatura. Calcular la pérdida de energía en un tramo de 3.500 m:

- a) por el diagrama de Moody.
- b) por las fórmulas aproximadas 2.37 y 2.38.

Solución

a) Se seguirá el algoritmo indicado en el inciso a) del apartado 2.5.1.

- i) Se calcula la velocidad media

$$U = \frac{4 Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.0065 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (0.1 \text{ m})^2} = 0.828 \text{ m/s}$$

- ii) Se calcula el número de Reynolds, considerando que la viscosidad del agua a 10°C es $1.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$\text{Re} = \frac{U D}{\nu} = \frac{0.828 \text{ m/s} \times 0.1 \text{ m}}{1.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 63,200$$

... y la rugosidad relativa tomando $\epsilon = 0.1 \text{ mm}$ para el acero soldado nuevo (tabla 2.1)

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.1 \text{ mm}}{100 \text{ mm}} = 10^{-3}$$

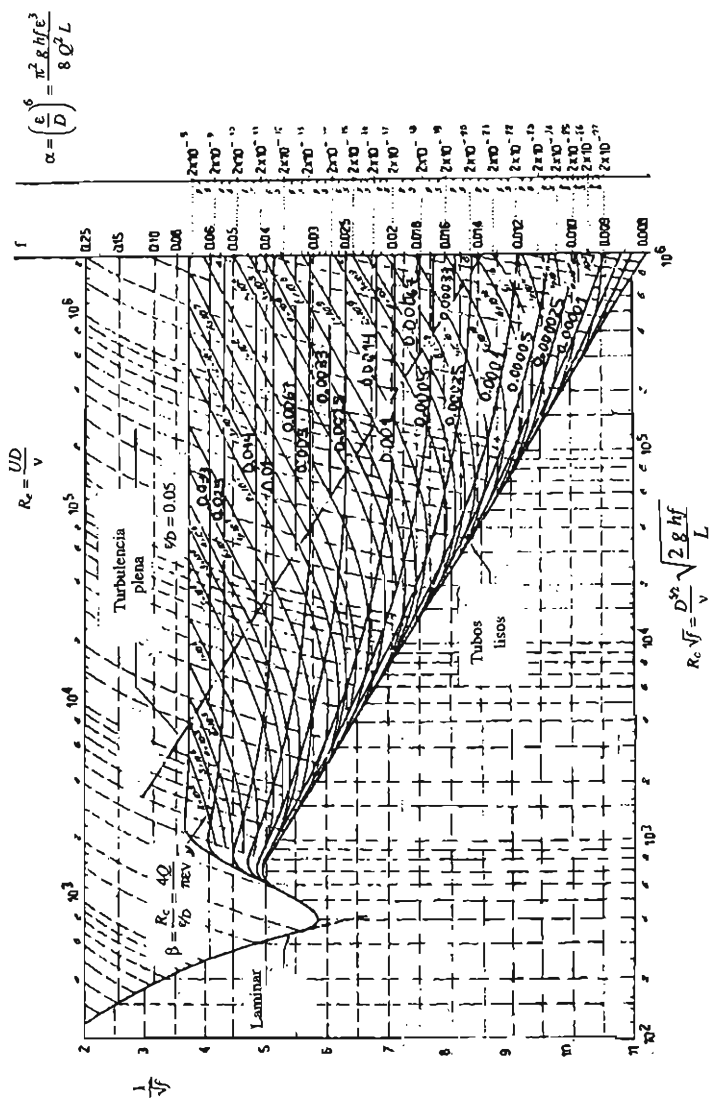


Figura 2.18: Diagrama de Rouse modificado para el cálculo del diámetro (Elaborado por el Ing. Ludovico Ivanisovich Machado [19]).

iii) Con Re y ϵ/D se extrae el factor de fricción f del diagrama a

$$f = 0.233$$

iv) Se calcula la pérdida con la fórmula de Darcy – Weisbach

$$h_f = \frac{f L U^2}{D 2g} = \frac{0.0233 \times 3,500 \text{ m} \times (0.828 \text{ m/s})^2}{0.1 \text{ m} \times 19.6 \text{ m/s}^2} = 28.5 \text{ m}$$

b) Reemplazando Re y ϵ/D en la fórmula 2.37 resulta

$$f = \frac{1.325}{\left[\ln \left(0.27 \times 10^{-3} + \frac{5.74}{63,200^{0.9}} \right) \right]^2} = 0.0234$$

... valor prácticamente igual al del inciso a); la pérdida calculada por la ecuación Darcy – Weisbach resulta

$$h_f = 28.6 \text{ m}$$

Haciendo lo propio con la fórmula 2.38:

$$f = 0.11 \left[10^{-3} + \frac{68}{63,200} \right]^{1/4} = 0.0235$$

... que tampoco tiene diferencia apreciable con los anteriores; la pérdida es en este caso

$$h_f = 28.7 \text{ m}$$

Problema resuelto 2.3 Diagrama de Moody: Cálculo del gasto. Obtener el gasto en una tubería de asbesto-cemento de 750 m de longitud y 150 mm de diámetro, por la que fluye agua a 20°C de temperatura, si la pérdida es de $h_f = 25 \text{ m}$:

- a) por el método iterativo.
- b) por el método directo.

Solución

a) Se sigue el primer algoritmo del inciso b) del apartado 2.5.1

i) Se calcula la rugosidad relativa, tomando un valor de $\epsilon = 0.025 \text{ mm}$ para asbesto-cemento

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.025}{150} = 1.67 \times 10^{-4}$$

ii) Se adopta un factor de fricción compatible con ε/D

$$f^{(1)} = 0.014$$

iii) Se calcula una velocidad media tentativa $U^{(1)}$

$$U^{(1)} = \sqrt{\frac{2g D h_f}{f^{(1)} L}} = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.15 \times 25}{0.014 \times 750}} = \frac{0.313}{\sqrt{0.014}}$$

$$U^{(1)} = 2.65 \text{ m/s}$$

Vale la pena haber calculado por separado el valor 0.313 en el penúltimo miembro de la anterior ecuación, porque permanece constante en las sucesivas iteraciones.

iv) Se calcula el número Reynolds tentativo considerando que para agua a 20° C es $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$

$$\text{Re}^{(1)} = \frac{U^{(1)} D}{\nu} = \frac{2.60 \times 0.15}{10^{-6}} = 398,000$$

v) Con $\text{Re}^{(1)}$ y ε/D se obtiene un nuevo factor de fricción del diagrama de Moody

$$f^{(2)} = 0.0155$$

A continuación la rutina de cálculo se hace cíclica volviendo al paso iii

$$\text{iii)} \quad U^{(2)} = \frac{0.313}{\sqrt{0.0155}} = 2.51 \text{ m/s}$$

$$\text{iv)} \quad \text{Re}^{(2)} = \frac{2.51 \times 0.15}{10^{-6}} = 377,000$$

$$\text{v)} \quad f^{(3)} = 0.0156$$

Puede aceptarse perfectamente que $f^{(3)} \cong f^{(2)}$; por lo tanto se adopta como verdadera la última velocidad calculada

$$U = U^{(2)} = 2.51 \text{ m/s}$$

... y el gasto se calcula por continuidad

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U = \frac{\pi \times 0.15^2}{4} \times 2.51 = 0.0443 \text{ m}^3/\text{s} = 44.3 \text{ l/s}$$

b) Se emplea el segundo algoritmo del mismo inciso

$$i) \quad \text{Re} \sqrt{f} = \frac{D^{3/2}}{\nu} \sqrt{\frac{2 g h_f}{L}} = \frac{0.15^{1.5}}{10^{-6}} \sqrt{\frac{19.6 \times 25}{750}} = 47,000$$

ii) De la ecuación de Coolebrook y White es

$$f = \frac{1}{\left[-2 \log \left(\frac{2.51}{47,000} + 0.269 \times 1.67 \times 10^{-4} \right) \right]^2} = 0.0156$$

que es el mismo valor obtenido en la parte a).

iii) La velocidad media será

$$U = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.15 \times 25}{0.0156 \times 750}} = 2.51 \text{ m/s}$$

iv) ... y el gasto

$$Q = \frac{\pi}{4} 0.15^2 \times 2.51 = 0.0443 \text{ m}^3/\text{s}$$

Finalmente faltaría verificar el número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{2.51 \times 0.15}{10^{-6}} = 377,000 > 4000 \quad (\text{flujo turbulento})$$

En lugar de emplear la fórmula de Coolebrook y White, el mismo factor de fricción podría haberse extraído del diagrama de Rouse (figura 2.17) entrando con $\text{Re} \sqrt{f}$ y ϵ/D

Problema resuelto 2.4 Diagrama de Moody: Cálculo del diámetro. Dimensionar una tubería de fierro fundido, para transportar 60 l/s de agua potable a 20°C en una longitud de 1,080 m, siendo la pérdida máxima tolerada de 12 m. Se prevé que la vida útil de la instalación sea de 10 años

a) emplear el diagrama de Moody.

b) emplear el diagrama de Rouse modificado.

Solución:

Este problema no sólo se refiere al cálculo del diámetro sino que también ilustra el problema del *envejecimiento* de la tubería. Se hará uso de la fórmula 2.36 de Genijew

$$\epsilon_t = \epsilon_o + \alpha t$$

La rugosidad del fierro fundido nuevo, extraída de la tabla 2.1 es $\epsilon_o = 0.25 \text{ mm}$. Si se trata de agua potable, de acuerdo con la tabla 2.2 se puede adoptar $\alpha = 0.05 \text{ mm/año}$ con un criterio más bien conservador; por lo tanto

$$\epsilon_t = 0.25 + 0.05 \times 10 = 0.75 \text{ mm}$$

a) Para determinar el diámetro se seguirá el algoritmo del inciso c) del apartado 2.5.1

i) Se calculan las constantes

$$C_1 = \frac{8 L Q^2}{\pi^2 g h_f} = \frac{8 \times 1,080 \times 0.06^2}{\pi^2 \times 9.8 \times 12} = 0.0268$$

$$C_2 = \frac{4 Q}{\pi v} = \frac{4 \times 0.06}{\pi \times 10^{-6}} = 76,400$$

ii) se adopta un primer factor de fricción; por tratarse de un material rugoso se supondrá

$$f^{(1)} = 0.022$$

iii) Se calcula un diámetro tentativo

$$D^{(1)} = \sqrt[5]{C_1 f^{(1)}} = \sqrt[5]{0.0268 \times 0.022} = 0.226 \text{ m}$$

iv) Se calcula la rugosidad relativa y el número de Reynolds para $D^{(1)}$

$$\frac{\epsilon}{D^{(1)}} = \frac{0.75}{226} = 0.0033$$

$$Re^{(1)} = \frac{C_2}{D^{(1)}} = \frac{76,400}{0.226} = 338,000$$

v) Con estos valores se va al diagrama de Moody y se obtiene

$$f^{(2)} = 0.0272$$

A partir de aquí se regresa al paso iii y se continúa el proceso iterativo

$$iii) \quad D^{(2)} = \sqrt{0.0268 \times 0.0272} = 0.236 \text{ m}$$

$$iv) \quad \frac{\varepsilon}{D^{(2)}} = \frac{0.75}{236} = 0.00318$$

$$Re^{(2)} = \frac{76,400}{0.236} = 324,000$$

$$v) \quad f^{(3)} = 0.0270$$

Puede admitirse que

$$f^{(3)} \cong f^{(2)}$$

... ya que la diferencia es inferior al 1%. De manera que puede aceptarse como diámetro requerido

$$D_r = D^{(2)} = 236 \text{ mm}$$

El diámetro a adoptar será el inmediato superior en la escala comercial, o sea

$$D \text{ (adoptado)} = 10" = 250 \text{ mm}$$

b) Para hacer uso del diagrama de Rouse modificado para el cálculo del diámetro (figura 2.18), deben calcularse los parámetros α y β (fórmulas 2.49 y 2.51)

$$\alpha = \frac{\pi^2 g h_f \varepsilon^5}{8 Q^2 L} = \frac{\pi^2 \times 9.8 \times 12 \times 0.00075^5}{8 \times 0.06^2 \times 1080} = 8.86 \times 10^{-15}$$

$$\beta = \frac{4 Q}{\pi \varepsilon L} = \frac{4 \times 0.06}{\pi \times 0.00075 \times 10^{-6}} = 1.02 \times 10^8$$

El factor de fricción se extrae del citado diagrama en función de estos dos valores:

$$f = 0.026$$

el cual no difiere apreciablemente del obtenido en la parte a) del problema. Se calcula el diámetro con la fórmula 2.52

$$D_r = \sqrt[3]{\frac{8 f L Q^2}{\pi^2 g h_f}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 0.026 \times 1080 \times 0.06^2}{\pi^2 \times 9.8 \times 12}} = 0.234 \text{ m}$$

El diámetro requerido es casi igual al hallado en la parte a) y el valor comercial será por supuesto el mismo

$$D \text{ (adoptado)} = 10'' = 250 \text{ mm}$$

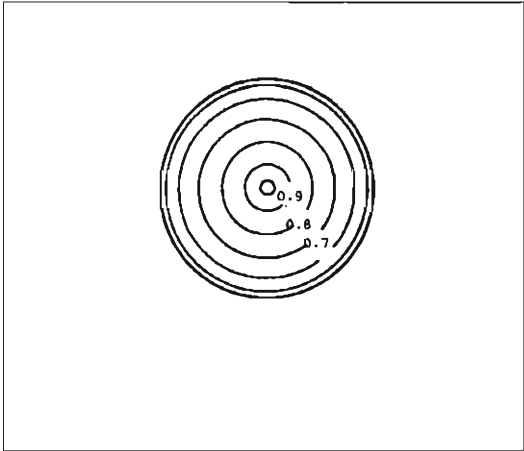


Figura 2.19: Plano de isotáqueas de una sección circular.

2.6 Tubos de sección no circular

Es poco frecuente encontrar en la práctica tuberías a presión de sección no circular; sin embargo no puede desdeñarse del todo esta posibilidad. En conducciones de gran caudal, por ejemplo, puede suceder que por razones estructurales o constructivas convenga emplear una sección cuadrada o rectangular. Los ductos de aire acondicionado son otro ejemplo de esta forma de tubo, aunque en este caso el fluido manejado es un gas. La sección anular, en la que el líquido escurre por el espacio comprendido entre dos cilindros concéntricos, se observa en pozos de bombeo con motor en superficie, en los cuales el eje del conducto por el cual se eleva el agua está ocupado por la flecha que une el motor con los impulsores. La sección circular, además de ofrecer múltiples ventajas como se dijo al final del punto 1.1, posee características muy especiales en cuanto al flujo debido a su simetría radial. En cualquier radio de la tubería (ver sección transversal de la figura 1.10) la distribución de velocidades es la misma; en la figura 2.19 se ve una forma clásica de representar esa distribución, mediante las llamadas *isotáqueas* o líneas de igual velocidad; en dicha figura cada línea está identificada con un número que representa la relación entre la velocidad a ese nivel y la velocidad máxima V_{max} que se verifica en el eje. Obviamente y de acuerdo con lo que se afirma en este párrafo, todas las isotáqueas serán concéntricas con el eje y en particular el contorno sólido coincidirá con la línea de velocidad cero. Otro tanto ocurre con la distribución de esfuerzos cortantes, que es lineal con el radio de acuerdo a la ecuación 1.38.

En tuberías no circulares (con excepción de la mencionada sección anular) la situación es diferente. El plano de isotáqueas de una sección cuadrada y el de una triangular son aproximadamente como se muestra en la figura 2.20. La distribución de esfuerzos cortantes también es irregular; en la figura 2.21 se observa

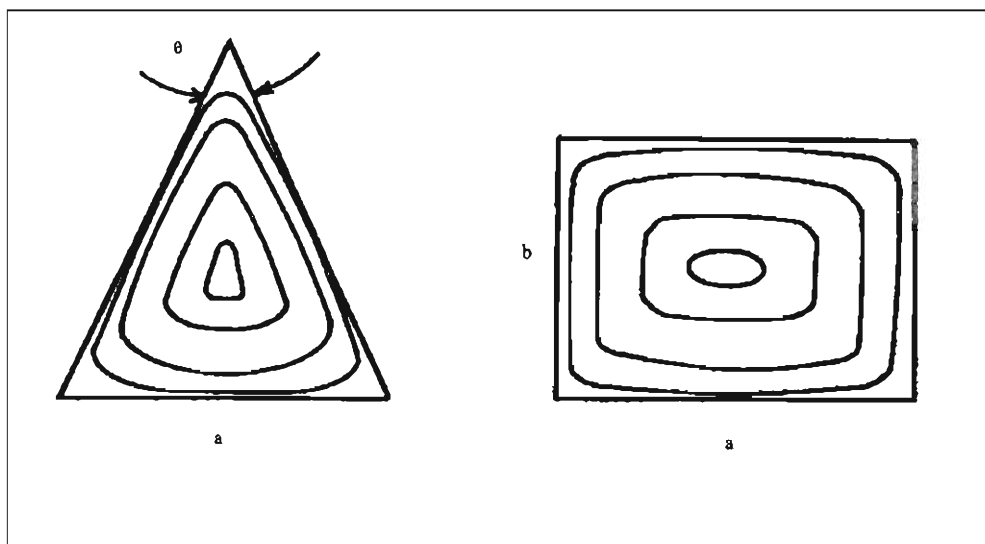


Figura 2.20: Plano de isotáqueas en secciones triangular y rectangular.

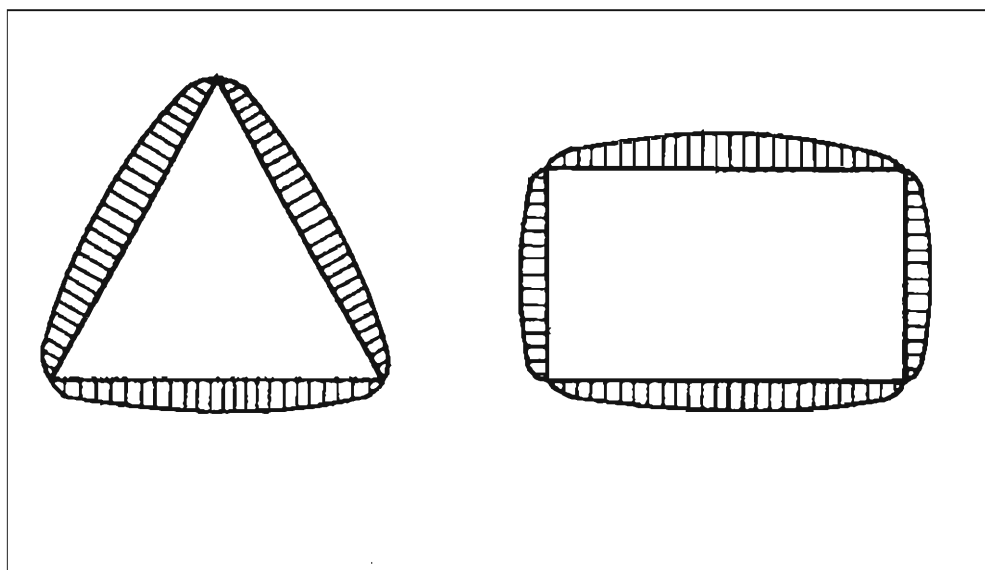


Figura 2.21: Distribución de esfuerzos cortantes en el perímetro de una sección triangular y una rectangular.

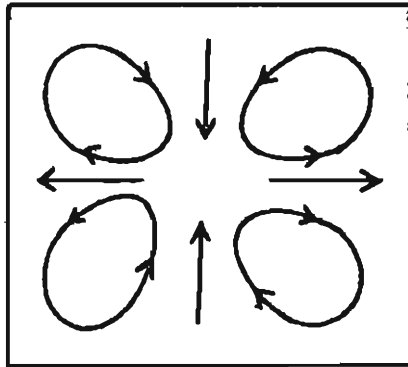


Figura 2.22: Corrientes secundarias.

la forma aproximada de la variación del esfuerzo τ_o en el contorno de dos tuberías no circulares; un detalle característico es que en las aristas vivas su valor es cero. Pero además el flujo en este tipo de secciones posee una propiedad adicional que incrementa la complejidad de su análisis y que son las *corrientes secundarias*, que aparecen en régimen turbulento; éstas son corrientes cerradas que, superpuestas al flujo longitudinal principal, hacen que las partículas en realidad se muevan en trayectorias helicoidales (figura 2.22).

Para analizar el flujo en secciones de forma cualquiera, una primera necesidad que surge es la siguiente: En casi todas las fórmulas empleadas hasta ahora interviene el diámetro de la tubería como variable; la palabra diámetro sólo tiene sentido preciso si la forma de la sección es circular; en los demás casos no está definido y por lo tanto debe encontrarse una medida que lo represente. Por diversos motivos, la más adecuada parece ser el *diámetro hidráulico*, que se define como cuatro veces el radio hidráulico, siendo este último igual al área dividida por el perímetro mojado.

$$D_h = 4 R_h = \frac{4 A}{P_m} \quad (2.53)$$

El perímetro mojado P_m es la parte del perímetro de la sección, constituida por una interfase sólido – líquido. En el caso de un tubo a presión coincide con el perímetro total porque, por definición, todo el flujo está rodeado por un elemento sólido. Distinta es la situación en canales abiertos donde parte del contorno del flujo está en contacto con la atmósfera. el radio hidráulico R_h , precisamente, es una variable que se emplea sobre todo en cálculo de canales, pero que puede aparecer en fórmulas para tuberías como algunas de las que se incluyen en la tabla 2.4.

Una de las razones para adoptar el diámetro hidráulico como medida representativa es que en la sección circular coincide con el diámetro.

$$D_h = \frac{4 \pi D^2/4}{\pi D} = D \quad (2.54)$$

En una sección *rectangular* de ancho a y altura b será:

$$D_h = \frac{4 a b}{2 (a + b)} = \frac{2 a b}{a + b} \quad (2.55)$$

En un *triángulo isósceles* de base a y ángulo opuesto θ

$$D_h = \frac{4 \times \frac{1}{2} \left[\frac{a^2}{\operatorname{tg}(\theta/2)} \right]}{a + \frac{2a}{\operatorname{sen}(\theta/2)}} = \frac{2a}{\operatorname{tg}(\theta/2) + \frac{2}{\cos(\theta/2)}} \quad (2.56)$$

En la *sección anular*, por su parte, será

$$D_h = \frac{4 \pi (D_i^2 - D_f^2)/4}{\pi (D_i + D_f)} = D_i - D_f \quad (2.57)$$

o sea que el diámetro hidráulico será la diferencia entre el diámetro del tubo y el diámetro de la flecha.

El diámetro hidráulico se empleará en la fórmula del número de Reynolds, en la de la rugosidad relativa y en la de Darcy – Weisbach.

$$\operatorname{Re}_{dh} = \frac{U D_h}{\nu} \quad (2.58)$$

$$\text{rugosidad relativa} = \frac{\varepsilon}{D_h} \quad (2.59)$$

$$h_f = \frac{f_{dh} L U^2}{D_h 2g} \quad 6 \quad (2.60)$$

pero no se justifica, por innecesario, se uso en la ecuación de continuidad. La velocidad media es siempre el gasto entre el área y ésta puede calcularse con precisión para cualquier forma de sección. En un rectángulo, por ejemplo:

⁶ Se llama f_{dh} al factor de fricción obtenido con el diámetro hidráulico.

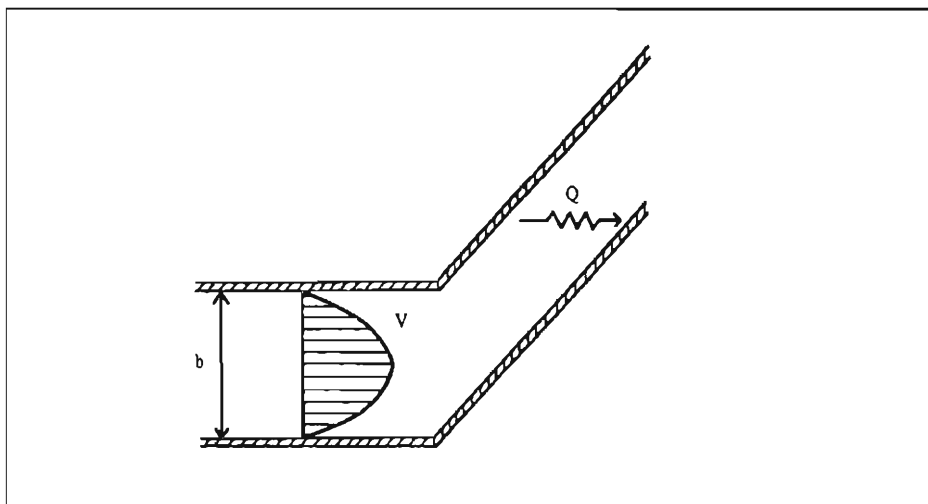


Figura 2.23: Flujo laminar entre placas planas paralelas.

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{ab}$$

El *flujo laminar*, por su carácter ordenado y libre de oscilaciones, es más fácil de estudiar con las herramientas que ofrece la teoría. Un caso típico de análisis es el flujo laminar entre placas planas paralelas (figura 2.23). Si se hace un tratamiento similar al efectuado para un tubo circular en el punto 2.3, se arribará a la siguiente expresión

$$h_f = \frac{12 \nu U L}{g b^2} \quad (2.61)$$

donde b es la separación entre placas. Esta es la ecuación de Hagen – Poiseulle para el flujo laminar entre placas planas paralelas. Si se desea que aparezca el diámetro hidráulico en la fórmula, será preciso primero calcular el valor de éste; para ello puede suponerse que la sección es la de un rectángulo de ancho muy grande comparado con la altura; de manera que podrá aceptarse que

$$D_h = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2ab}{a + b} = 2b \quad (\text{placas planas paralelas}) \quad (2.62)$$

Reemplazando en la 2.61, resulta

$$h_f = \frac{48 \nu U L}{g D_h^2} \quad (2.63)$$

si esta ecuación se iguala con la de Darcy – Weisbach en su forma 2.60 y luego se despeja el factor de fricción,

Se obtiene

$$f = \frac{96 \nu}{U d_h}$$

Si ahora se introduce la ecuación del número de Reynolds 2.58

$$f = \frac{96}{Re_{dh}} \tag{2.64}$$

Como se observa, esta fórmula es parecida a la 2.31 que evalúa el factor de fricción en tubos circulares para régimen laminar, sólo que en aquel caso la constante era 64 en lugar de 96. A dicha constante se le llamará en general χ , de manera que

$$f = \frac{\chi}{Re_{dh}} \tag{2.65}$$

La teoría del flujo laminar puede aplicarse también a otras secciones geométricas. En la tabla 2.3 se sintetizan los resultados para tubos rectangulares y triangulares (isósceles). Para calcular un tubo no circular en flujo laminar, entonces, el procedimiento empieza por obtener Re_{dh} por la 2.58, luego el valor de χ con ayuda de la tabla, el factor de fricción por la 2.65 y finalmente la pérdida con la ecuación Darcy–Weisbach 2.60.

Tabla 2.3

Constantes χ para tubos rectangulares y triangulares en flujo laminar

Rectangular		Triángulo isósceles	
b/a	χ	θ (grados)	χ
0	96	0	48
0.05	89.91	20	51.6
0.1	84.68	40	52.9
0.125	82.34	60	53.3
0.167	78.81	80	52.9
0.25	72.93	100	52.0
0.4	65.47	120	51.1
0.5	62.19	140	49.5
0.75	57.89	160	48.3
1	56.91	180	48

Fuente: Referencia [1]

Al final que en tubos circulares, en secciones de forma cualquiera el flujo empieza a hacerse inestable a partir de $Re_{dh} = 2,200$. En *régimen turbulento*, la complejidad del problema aumenta. Para hacer un estudio riguroso al respecto, deberá empezarse por aplicar el análisis dimensional; los parámetros adimensionales que se obtendrán en este caso serán, además del número de Reynolds y la rugosidad relativa, los que describen las proporciones de la sección; por ejemplo, para un tubo de sección rectangular será

$$f = f\left(Re, \frac{e}{D_h}, \frac{b}{a}\right)$$

Evidentemente el manejo de más de dos parámetros independientes hace que el problema se complique y aún así faltaría tener en cuenta el efecto de las corrientes secundarias, que también hacen su aporte a la resistencia al flujo.

Afortunadamente se ha podido demostrar que el empleo del diagrama de Moody, simplemente usando el diámetro hidráulico D_h en lugar del diámetro, arroja resultados bastante aproximados. Si se tienen en cuenta a las ecuaciones 2.64 y 2.31 para flujo laminar, se verá que si un sistema de placas planas paralelas se calcula con la segunda (que está integrado al diagrama Moody), el factor de fricción que se obtendrá será menor que el real en un 33% ($1 - \frac{64}{96} = 0.33$). Esa situación no llega a producirse en flujo turbulento, donde el error no supera el 15%. El procedimiento será entonces calcular $Re_{dh} = \frac{U D_h}{\nu}$ y $\frac{e}{D_h}$, y con estos valores obtener f_{dh} del diagrama de Moody para finalmente calcular la pérdida con la ecuación de Darcy – Weisbach 2.60.

Investigaciones recientes [20] han demostrado que la precisión mejora si en lugar del diámetro hidráulico se emplea el *diámetro efectivo* en la evaluación del factor de fricción. Esta nueva variable se calcula por la siguiente expresión:

$$D_{ef} = \frac{64}{\chi} D_h \quad (2.66)$$

Podría causar sorpresa que la constante χ , que surge de la teoría del flujo laminar, permita obtener una variable que se emplea en cálculos de flujo turbulento; sin embargo eso es lo que aconsejan los resultados experimentales, aún para tubos rugosos.

Naturalmente que el diámetro efectivo podrá ser usado siempre que se tenga información al respecto, como la que ofrece la tabla 2.3 para tubos rectangulares y triangulares. Otros autores [21], [22], [23], reportan valores para otras formas de sección, aunque de relativo interés práctico.

Es importante señalar que en caso de emplear el diámetro efectivo se lo hará sólo para calcular el número de Reynolds y la rugosidad relativa, a fin de evaluar el factor de fricción (que en tal caso se simboliza f_{def}). En la fórmula de Darcy–Weisbach interviene siempre el diámetro hidráulico. De modo que las ecuaciones 2.58 y 2.60 adoptarán la forma

$$Re_{def} = \frac{U D_{ef}}{\nu} \quad (2.67)$$

$$\text{rugosidad relativa} = \frac{e}{D_{ef}} \quad (2.68)$$

$$h_f = \frac{f_{def} L U^2}{D_h 2g} \quad (2.69)$$

El uso del diámetro efectivo se recomienda principalmente cuando se desea hacer cálculos precisos en secciones muy alargadas o muy angostas (figura 2.24). Si por el contrario la relación altura/ancho de la sección no difiere mucho de la unidad, el factor de fricción resultante es prácticamente igual al que se obtiene con el diámetro hidráulico.

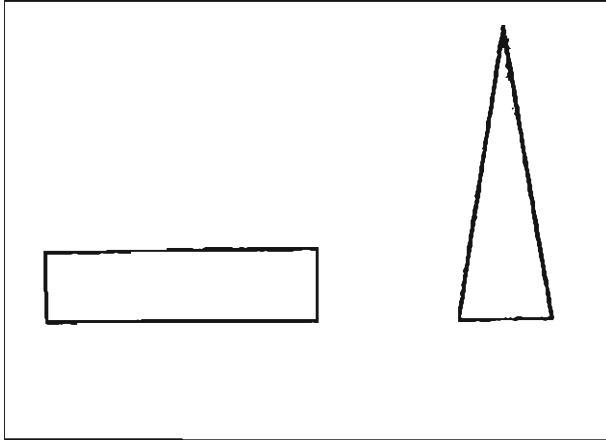


Figura 2.24: Secciones de tubo alargadas.

Problema resuelto 2.5 Tubos de sección no circular. Con el fin de entubar una corriente natural de 2.24 m^3/s de caudal máximo, se adopta una sección transversal como la de la figura 2.25. En un tramo de 2 km de longitud la conducción es a presión. Calcular la pérdida suponiendo una rugosidad $\epsilon = 1.5 \text{ mm}$ (concreto colado en cimbra normal de madera)

- a) empleando el diámetro hidráulico.
- b) empleando el diámetro efectivo.

Solución: Por tratarse de dos tubos iguales en paralelo se calculará la pérdida considerando uno de ellos, el cual, por razones de simetría, transporta la mitad del gasto

$$Q \text{ (un tubo)} = \frac{Q \text{ (total)}}{2} = \frac{2.24}{2} = 1.12 \text{ } m^3/s$$

La velocidad medida será:

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{1.12}{0.8 \times 0.9} = 1.56 \text{ } m/s$$

a) El diámetro hidráulico es:

$$D_h = \frac{4 A}{P} = \frac{2 ab}{a + b} = \frac{2 \times 0.8 \times 0.9}{0.8 + 0.9} = 0.847 \text{ m}$$

Con este valor se calcula la pérdida como si se tratara de un tubo circular

$$ii) \quad Re_{dh} = \frac{U D_h}{\nu} = \frac{1.56 \times 0.847}{10^{-6}} = 1,320,000$$

$$\frac{\varepsilon}{D_h} = \frac{0.0015 \text{ m}}{0.847 \text{ m}} = 1.77 \times 10^{-3}$$

iii) El factor de fricción se obtiene del diagrama de Moody en función de estos dos parámetros

$$f_{dh} = 0.0228$$

iv) Se calcula la pérdida por la ecuación de Darcy – Weisbach

$$h_f = \frac{f_{dh} L}{D_h} \frac{U^2}{2g} = \frac{0.0228 \times 2000 \times 1.56^2}{0.847 \times 19.6} = 6.68 \text{ m}$$

b) El diámetro efectivo se calcula por la ecuación 2.66. La cantidad χ se obtiene de la tabla 2.3 en función de la relación $b/a = 0.8/0.9 = 0.89$ Por interpolación es:

$$\chi = 57.38$$

Reemplazando en la ecuación mencionada

$$D_{ef} = \frac{64}{57.38} \times 0.847 = 0.945 \text{ m}$$

Nuevamente se calcula la pérdida como si fuera un tubo circular

$$ii) \quad Re_{def} = \frac{U D_{ef}}{\nu} = \frac{1.56 \times 0.945}{10^{-6}} = 1,470,000$$

$$\frac{\varepsilon}{D_{ef}} = \frac{0.0015}{0.945} = 1.59 \times 10^{-3}$$

iii) Del diagrama Moody

$$f_{def} = 0.0222$$

$$iv) \quad h_f = \frac{f_{def} L}{D_h} \frac{U^2}{2g} = \frac{0.0222 \times 2000 \times 1.56^2}{0.847 \times 19.6} = 6.51 \text{ m}$$

La diferencia es de apenas el 2.5% si se compara con el cálculo hecho en la parte a). Este es un caso en el que el refinamiento de evaluar el factor de fricción empleando el diámetro efectivo resulta exagerado.

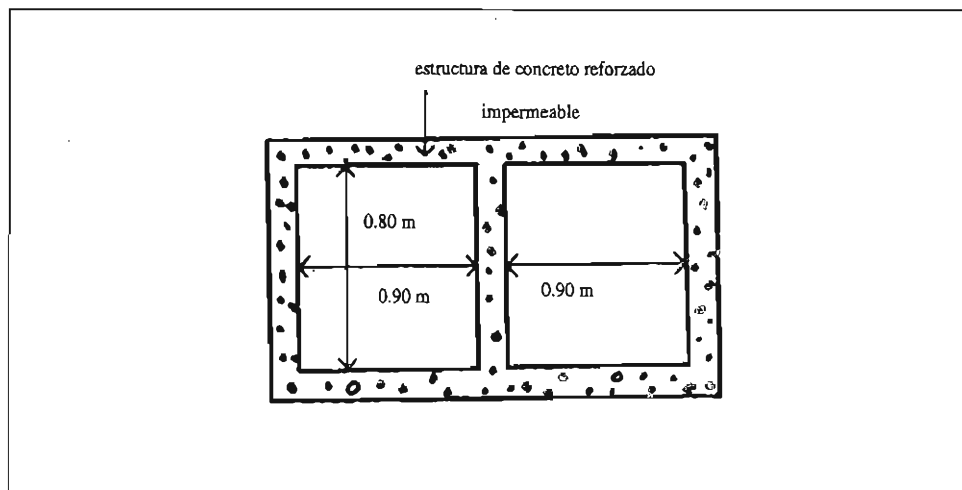


Figura 2.25: Problema resuelto 2.5.

Problema resuelto 2.6 Flujo laminar entre placas planas paralelas.

Un depósito de aceite SAE 30, construido en placa de acero remachada, tiene una fuga en una de sus juntas (figura 2.26). El traslape entre ambas es de 35 cm y el espesor de la abertura es de 3 mm. Calcular la cantidad de aceite que se pierde por metro de junta en litro/día si la superficie libre está a 1.45 m por encima de la junta y la temperatura es de 25°C.

Solución: El flujo de aceite a través de la abertura en la junta puede considerarse un caso de régimen laminar entre placas planas paralelas, de longitud $L = 35$ cm, de espesor $b = 3$ mm y ancho $a = 1$ m, ya que se pide calcular la fuga por metro de junta. En primer lugar se planteará la ecuación de la energía entre los puntos o , en la superficie del tanque y s , en la salida de la fuga a la atmósfera.

$$\left(z_o + \frac{P_o}{\gamma} + \alpha \frac{U_o^2}{2g} \right) - \left(z_s + \frac{P_s}{\gamma} + \alpha \frac{U_s^2}{2g} \right) = H_f$$

Las simplificaciones a hacer son las siguientes:

- $P_o/\gamma = P_s/\gamma = 0$ por estar ambos puntos en contacto con la atmósfera.
- $U_o = 0$ por estar en reposo el líquido en el tanque.
- $H_f = h_f$ considerando que sólo existen pérdidas primarias.

- Finalmente, también se supondrá $U_s^2/2g \approx 0$ pues en flujo laminar nunca se desarrollan presiones dinámicas importantes; esta hipótesis se probará acertada cuando se haya resuelto el problema.

De manera que la ecuación se reduce a

$$h_f = z_o - z_s = 1.45 \text{ m} \quad (\text{de la figura})$$

El gasto Q , que es la incógnita del problema, habrá de calcularse partiendo de la ecuación 2.61; despejando de ella la velocidad, resulta

$$U = \frac{h_g g b^2}{12 \nu L}$$

La viscosidad cinemática del aceite SAE 30 a 25°C es de $2.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ [3]. Reemplazando en la fórmula

$$U = \frac{1.45 \times 9.8 \times 0.003^2}{12 \times 2.2 \times 10^{-4} \times 0.35} = 0.138 \text{ m/s}$$

Para estar seguros de que el flujo es laminar, deberá calcularse el número de Reynolds Re_{dh} y verificar que es menor que 2,200. El diámetro hidráulico es en este caso igual a $2b$ por la 2.62

$$Re_{dh} = \frac{U D_h}{\nu} = \frac{U (2b)}{\nu} = \frac{0.138 (2 \times 0.003)}{2.2 \times 10^{-4}} = 3.76$$

El flujo es marcadamente laminar ya que $Re_{dh} < 2,200$. A continuación se verificará que efectivamente la energía cinética de salida es despreciable; para ello se tomará en cuenta que el coeficiente de Coriolis para flujo laminar entre placas planas paralelas es $\alpha = 1.67$ [13]

$$\alpha \frac{U_s^2}{2g} = \frac{1.67 \times 0.138^2}{19.6} = 1.62 \times 10^{-3} \text{ m}$$

valor insignificante frente a la pérdida h_f que es de 1.45 m. Finalmente el gasto será, por continuidad

$$Q = UA = U b a = 0.138 \times 1 \times 0.003 = 4.14 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

pero el problema pide el resultado en litros por día:

$$Q = 4.14 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \times 1,000 \text{ l/m}^3 \times 86,400 \text{ s/día} = 35,800 \text{ l/día}$$

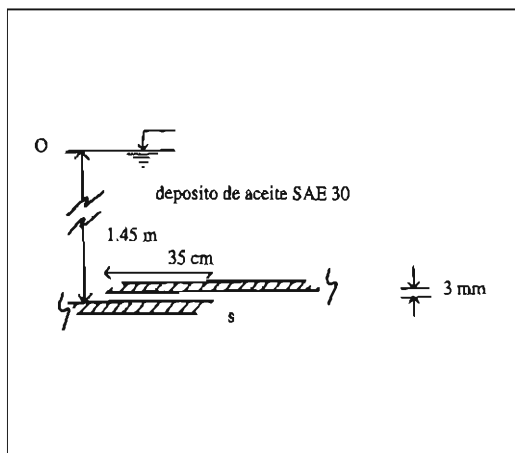


Figura 2.26: Problema resuelto 2.6.

2.7 Fórmulas empíricas

Como conclusión de lo visto en los puntos anteriores puede decirse que el diagrama de Moody es una herramienta de cálculo que sintetiza estudios llevados a cabo por científicos como Hagen, Poiseuille, Reynolds, Prandtl y sus seguidores. Estos investigadores se preocuparon por conocer la esencia misma del movimiento de los fluidos y por eso es que el diagrama de Moody es, por excelencia, el *método racional* para el cálculo de tuberías. Esta característica trae aparejada también su generalidad; recuérdese que con esta carta se puede hacer el cálculo de conducciones a presión para cualquier líquido, cualquier material, sea liso o rugoso, cualquier diámetro y cualquier régimen de flujo; de ahí su nombre de diagrama universal.*

Ahora bien, el problema de calcular tubos de presión preocupó a los ingenieros desde hace mucho tiempo; inclusive desde mucho antes de publicarse el diagrama de Moody que data de 1944. Estas personas, naturalmente, estaban más interesadas en resolver el problema práctico que en analizar los aspectos básicos de la mecánica de los fluidos; de manera que, lejos de hacer extensas deducciones teóricas, se dedicaron más bien a medir gastos y pérdidas en tubos existentes y proponer alguna fórmula que correlacionara bien estas mediciones. Tal es el origen de las así llamadas *fórmulas empíricas*, debido precisamente a su naturaleza netamente experimental.

A diferencia del diagrama de Moody el *campo de aplicación* de estas fórmulas es *restringido*; cada una de ellas está indicada para cierto tipo de flujos; por ejemplo, hay algunos que sólo son válidas para agua en régimen turbulento, otras para tubos lisos, otras para diámetros limitados. Sin embargo, debe señalarse que a pesar de esto *no son necesariamente más imprecisas* que el diagrama. Si bien este último es más riguroso porque incluye al número de Reynolds en su formulación, tiene un punto débil que es la evaluación de la rugosidad absoluta. Para algunos materiales, como se aprecia en la tabla 2.1, el rango de variación de ϵ es muy grande; la incertidumbre que se tenga en la estimación de esta cantidad se traducirá en un

* Existe sin embargo la limitación de que el líquido debe ser Newtoniano

cálculo impreciso del factor de fricción. Frente a esto el empleo de una fórmula empírica, *siempre dentro de su campo de aplicación*, puede arrojar resultados tan plausibles como el diagrama Moody, a pesar de no incluir a la viscosidad como variable. *El material* que constituye la tubería está *representado* en las fórmulas, pero no por su rugosidad absoluta sino *por coeficientes, términos o exponentes* que resultan del análisis estadístico que les da origen.

Debido precisamente a que estas fórmulas surgen de un procedimiento estadístico y no de un estudio teórico, en general *no son dimensionalmente homogéneas*; el análisis de las dimensiones físicas del segundo miembro no arroja la dimensión de la variable explícita. Por esta razón cada variable deberá introducirse en determinadas unidades de medida; si se desea emplear otro sistema de unidades deberá calcularse el coeficiente correctivo.

Un grupo importante, dentro de las fórmulas empíricas, lo constituyen las llamadas *fórmulas monómicas*. Esta cualidad es importante desde el punto de vista de la sencillez de los cálculos, ya que cualquier variable podrá despejarse fácilmente en función de las demás. Con el diagrama de Moody, en cambio, es necesario seguir los algoritmos explicados en el apartado 2.5.1 que a veces son algo engorrosos. Aun con las facilidades que representa el cálculo automático, la sencillez en el manejo de estas fórmulas reporta ventajas, sobre todo en el cálculo de redes complejas (ver capítulo 5 y 6). La forma general de las ecuaciones monómicas es la siguiente

$$h_f = k \frac{Q^n}{D^{n'}} L = a Q^n \quad (2.70)$$

donde: k es un coeficiente que, en general, depende del material;
 n, n' son exponentes

En el tercer miembro el coeficiente $a = kL/D^{n'}$ depende por lo tanto del material y de la geometría del tubo. La fórmula de *Darcy – Weisbach* tiene la misma estructura que esta ecuación. Ya en alguna ocasión se presentó su expresión en función del gasto

$$h_f = \frac{8}{\pi^2 g} f \frac{L Q^2}{D^5} \quad (2.43)$$

Comparando con la 2.70, resulta

$$\begin{aligned} k &= \frac{8f}{\pi^2 g} \\ n &= 2 \\ n' &= 5 \\ a &= \frac{8fL}{\pi^2 g D^5} \end{aligned}$$

(2.71)

En su origen, esta fórmula también es empírica. Lo que la hace racional es la evaluación que se hace del factor de fricción por medio del diagrama de Moody; pero cuando Darcy la propuso por primera vez en 1857, no la obtuvo por vía del análisis dimensional como se hizo aquí en el apartado 2.1, ni imaginó el refinamiento que se alcanzaría en la obtención del factor de fricción.

En la tabla 2.4 se hace una síntesis de las fórmulas empleadas en general para el cálculo de tuberías. En la primera parte se presentan diversas ecuaciones para el cálculo del factor de fricción Darcy – Weisbach, incluyendo las que dan origen al diagrama de Moody, así como las ya presentadas en el apartado 2.4.4, que permiten obtener f en forma explícita. En la segunda parte de la tabla se detallan algunas fórmulas empíricas, de diversas edades y orígenes, y finalmente se mencionan algunas más sólo por el nombre de su autor, ya que su cantidad es enorme y no tiene caso presentarlas a todas. Aun así la lista es bastante numerosa, de manera que se elegirán tres de las más importantes para exponerlas con más detalle y emplearlas en la resolución de problemas.

Tabla 2.4

Fórmulas para el cálculo de tuberías

Primera parte: Fórmula de Darcy–Weisbach y ecuaciones diversas para evaluar el factor de fricción

Fórmula	Observaciones
Darcy–Weisbach $h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$	Tiene su origen remoto en la fórmula de Darcy (1857). Esta expresión tiene la ventaja de ser dimensionalmente homogénea. Es válida para cualquier tipo de flujo , condicionado a la evaluación del factor de fricción f , que se obtiene por alguna de las fórmulas que se citan a continuación.
Poiseulle $f = \frac{64}{Re}$	Válida para el flujo laminar ($Re < 2200$).
Blasius (1903) $f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}}$	Válida para flujo turbulento en tubos lisos ($Re > 10^5$).
Nikuradse $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(Re \sqrt{\frac{f}{2.51}} \right)$	Válida para el flujo turbulento en tubos lisos ($2,200 \leq Re \leq 3'400,000$) llamada también ecuación de Karman – Prandtl para tubos lisos.

Tabla 2.4 Primera parte (continuación)

Fórmula	Observaciones
Kozeny $f = \frac{2g}{\left(7.78 \log Re - 5.95\right)^2}$	Válida para flujo turbulento en tubos de asbesto-cemento ($Re > 4,000$).
Richter $f \approx 0.01113 + \frac{0.917}{Re^{0.41}}$	Válida para flujo turbulento en tubos de hule ($Re > 4,000$).
Nikuradse $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(3.72 \frac{D}{\epsilon} \right)$	Válida para turbulencia plenamente desarrollada $\left(Re \sqrt{f} \frac{\epsilon}{D} > 170 \right)$ llamada también ecuación de Karman – Prandtl para tubos rugosos.
Kozeny $f = \frac{2g}{\left(8.86 \log D + N\right)^2}$	Válida para turbulencia plena. N es un término que depende del material y puede consultarse en la referencia [9].
Shifrinson $f = 0.11 \sqrt[4]{\epsilon/D}$	Válida para turbulencia plena. Es una expresión aproximada a la de Nikuradse pero más sencilla.
Coolebrook y White $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re} \sqrt{f} + 0.269 \frac{\epsilon}{D} \right)$	Válida para flujo turbulento en tubos lisos y rugosos ($Re > 4,000$).
Altshul $\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.8 \log \frac{Re}{Re \left(\frac{\epsilon}{10D} \right) + 7}$	Aproximada a la anterior pero el factor de fricción está explícito ($Re > 4,000$).

Tabla 2.4 Primera parte (continuación)

Fórmula	Observaciones
<p>Altshul</p> $f = 0.11 \left[\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{68}{Re} \right]^{1/4}$	<p>Similar a la anterior pero de formulación exponencial ($Re > 4,000$).</p>
<p>Shacham</p> $f = \left\{ -2 \log \left[\frac{\epsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{14.5}{Re} \right) \right] \right\}^{-2}$	<p>Aproximada a la Coolebrook y White pero el factor de fricción está explícito ($Re > 4,000$).</p>
<p>Don Wood</p> $f = a + b Re^{-c}$ <p>donde</p> $a = 0.094 (\epsilon/D)^{0.225} + 0.53 (\epsilon/D)$ $b = 88 (\epsilon/D)^{0.44}$ $c = 1.62 (\epsilon/D)^{0.134}$	<p>Aproximada a la de Coolebrook y White pero el factor de fricción está explícito. ($Re > 10,000$ y $10^{-5} < \epsilon/D < 0.04$).</p>
<p>Churchill</p> $f = \frac{1.325}{\left[\ln \left(0.27 \frac{\epsilon/D}{Re} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$	<p>Aproximada a la de Coolebrook y White pero el factor de fricción está explícito. ($5000 < Re < 10^6$ y $10^{-6} < \epsilon/D < 10^{-2}$).</p>
<p>Chen</p> $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left\{ A - B \log \left[A - B \log \left(A - B \log \left[A - B \log \left(A + \frac{14}{Re} \right) \right] \right) \right] \right\}$	<p>Aproximada a la de Coolebrook y White pero el factor de fricción está explícito. Válida para flujo turbulento.</p> <p>$A = 0.269 \frac{\epsilon/D}{Re}$ $B = \frac{5.02}{Re}$</p>

Fuentes: Referencias [2], [9], [12], [13], [15] y [23]

Tabla 2.4

Fórmulas para el cálculo de tuberías

Segunda parte: Fórmulas empíricas. Todas ellas se expresan para unidades S.I.: h_f , D , R_h y L en metros, U en m/s y en Q m^3/s , S_f es adimensional. Se recuerda que R_h (radio hidráulico) $= A/P_m$ (2.53) y que S_f (pérdida unitaria) $= h_f/L$ (1.36).

Fórmula	Observaciones
Hazen – Williams $Q = 0.278 C_H \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.541} D^{2.62}$	Válida para agua en flujo turbulento ($50 \text{ mm} < D < 3,500 \text{ mm}$). El coeficiente C_H depende del material y puede consultarse en la tabla 2.5.
Scimemi $Q = c \left(\frac{h_f}{L} \right)^{m_1} D^{m_2}$	Es la expresión general de la fórmula monómica. Válida para agua en flujo turbulento. El coeficiente c y los exponentes m_1 y m_2 dependen del material y figuran en la tabla 2.5.
Chezy (1750) $U = C \sqrt{R_h S_f}$	Es la fórmula más antigua y general para flujo de agua en turbulencia plena. El coeficiente C se evalúa por algunas de las fórmulas que van a continuación. El radio hidráulico R_h es igual a $D/4$.
Bazin $C = \frac{87}{1 + 4\sqrt{R_h}}$	Evalúa el coeficiente C de Chezy. El coeficiente Δ depende del material; puede consultarse en la referencia [30].
Kutter $C = \frac{100 \sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}}$	Evalúa el coeficiente C de Chezy. El término m depende del material; puede consultarse en la referencia [9].

Tabla 2.4 Segunda parte (continuación)

Fórmula	Observaciones								
Manning – Strickler $U = \frac{1}{n} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3}$	Resulta de reemplazar en la ecuación de Chezy $C = R_h^{1/6} n$ depende del material y puede consultarse en la tabla 2.5.								
Ludin $U = 140 R_h^{0.645} S_f^{5/6}$	Válida para tubos de asbesto – cemento (agua en flujo turbulento).								
von Bernuth $h_f = 0.02458 \frac{v^{0.25} Q^{1.75}}{d^{4.75}} L$	Válida para tubos de plástico de pequeño diámetro; v es la viscosidad cinemática del líquido								
Fair – Whipple – Hsiao $Q = \alpha \left(\frac{h_f}{L} \right)^{m_1} D^{m_2}$	Válida para agua en flujo turbulento en tubos de 13 a 50 mm. Para acero galvanizado: $\alpha = 2.71 \quad m_1 = 0.53 \quad m_2 = 2.60$ Para cobre o latón: <table> <tr> <td>agua fría</td><td>agua caliente</td></tr> <tr> <td>$\alpha = 55.9$</td><td>$\alpha = 63.3$</td></tr> <tr> <td>$m_1 = 0.57$</td><td>$m_1 = 0.57$</td></tr> <tr> <td>$m_2 = 2.71$</td><td>$m_2 = 2.71$</td></tr> </table>	agua fría	agua caliente	$\alpha = 55.9$	$\alpha = 63.3$	$m_1 = 0.57$	$m_1 = 0.57$	$m_2 = 2.71$	$m_2 = 2.71$
agua fría	agua caliente								
$\alpha = 55.9$	$\alpha = 63.3$								
$m_1 = 0.57$	$m_1 = 0.57$								
$m_2 = 2.71$	$m_2 = 2.71$								

Tabla 2.4 Segunda parte (continuación)

Las que siguen se incluyen principalmente como referencia histórica

Fórmula	Observaciones
Dupuit (1855) $S_f = \frac{Q^2}{400 D^5}$	Válida para agua en flujo turbulento.
Darcy (1857) $S_f = 6.48 \left(\alpha + \frac{\beta}{D} \right) \frac{Q^2}{D^5}$	Válida para agua. Para hierro fundido nuevo: $\alpha = 0.0002535 \quad \beta = 0.00000647$ Para hierro fundido usado: $\alpha = 0.000507 \quad \beta = 0.00001294$
Levy (1867) $U = \alpha \sqrt{\frac{D}{2} \left(1 + 2.12 \sqrt{D} \right)} \sqrt{S_f}$	Válida para agua en flujo turbulento. Para hierro fundido nuevo. $\alpha = 36.4$ Para hierro fundido usado. $\alpha = 20.5$
Lang (1905) $S_f = \frac{b U^2}{D}$ $b = \frac{1}{2g} \left(0.02 + \frac{0.002}{\sqrt{UD}} \right)$	Válida para agua en flujo turbulento.

Otras fórmulas empíricas: Dubuat, Woltmann, Eytelwein, Coulomb, Eisenmann, Prony, D'Aubuisson, Tadini, Weisbach, Saint – Venant, Leslie, Bresse, Gauckler, Lampe, Fanning, Hamilton – Smith, Colombo, Darrach, Ehrmann, Iben, Franck, Thrupp, Unwin, Stearns – Brush, Geslain, Tutton, Flamant, Fournié, Hiram – Mills, Christen, Biegeleisen – Bukowski, Lawford.

Fuentes: Referencias [9], [19], [24], [30], [31] y [32]

2.7.1 Fórmulas de Hazen – Williams, Scimemi y Manning – Strickler

La fórmula de Hazen – Williams es seguramente la más difundida y probada, sobre todo en Estados Unidos y demás países del continente americano. Para su formulación los autores se basaron en numerosas mediciones, propias y de otros investigadores y en un cuidadoso análisis estadístico. Los ensayos incluyeron tuberías de casi todos los materiales empleados en la época, pero posteriormente la fórmula fue corroborada para otros de aplicación más reciente. El coeficiente C_H , que representa al material, ha podido ser bien determinado para una gran variedad de ellos, tanto nuevos como usados, por lo cual se puede tener en cuenta también el problema del envejecimiento. Otra razón que ha influido en su gran aceptación es su campo de aplicación, el cual es bastante extenso, ya que puede ser empleada satisfactoriamente en conducciones de agua en cualquier tipo de material, en flujo turbulento y en diámetros de 50 a 3,500 mm. Las siguientes son las distintas expresiones de esta fórmula para el cálculo de la pérdida, el gasto, la velocidad media y el diámetro.

$$h_f = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \frac{Q^{1.85}}{D^{4.85}} L \quad (2.72)$$

$$Q = 0.278 C_H \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.541} D^{2.62} \quad (2.73)$$

$$U = 0.354 C_H \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.541} D^{0.62} \quad (2.74)$$

$$D = \frac{1.629}{C_H^{0.381}} Q^{0.381} \left(\frac{L}{h_f} \right)^{0.206} \quad (2.75)$$

Comparando la 2.72 con la 2.70 resulta:

$$\begin{aligned} k &= 10.68/C_H^{1.85} \\ n &= 1.85 \\ n' &= 4.85 \\ a &= \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \frac{L}{D^{4.85}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

El coeficiente C_H será mayor entre más liso sea el material; en la tabla 2.5 se presentan algunos valores típicos; para materiales muy rugosos como placa corrugada, su valor es de 60; para muy lisos, como PVC o asbesto-cemento, es de 140 a 150; para fierro y acero en sus diversas formas oscila entre 90 y 130. Las expresiones 2.72 a 2.76 son válidas siempre que se empleen las siguientes unidades de medida:

$$\begin{aligned} h_f, D \text{ y } L &\text{ en metros;} \\ Q &\text{ en m}^3/\text{s} \\ U &\text{ en m/s} \end{aligned}$$

Tabla 2.5

**Coefficientes y exponentes para las fórmulas de Hazen-Williams,
Scimemi y Manning-Strickler**

Material	Hazen-Williams	Scimemi			Manning
	CH	c	m_1	m_2	n
Acero corrugado	60				
Acero con juntas lock-bar (nuevo)	135				
Acero galvanizado (nuevo)	130				
Acero galvanizado (usado)	125				
Acero remachado (nuevo)	110				0.015 a 0.016
Acero remachado (usado)	85				
Acero soldado o con avellanado (nuevo)	120	29.7	0.53	2.755	0.012 a 0.013
Acero soldado o con avellanado (usado)	90				
Acero sin costura (nuevo)		36.4	0.55	2.59	
Acero soldado con revestimiento especial	130				
Fierro fundido: nuevo 10 años de uso 20 años 30 años 40 años	130 110 90-100 75-90 64-83	35	0.535	2.625	0.013
Plástico (PVC)	140-150				
Asbesto-cemento (nuevo)	140	50.5	0.56	2.68	
Cobre y latón	130				
Bronce	130-140				

Tabla 2.5 (continuación)

Material	Hazen-Williams	Scimemi			Manning
	CH	c	m_1	m_2	n
Plomo	130				
Vidrio	140-150				
Concreto (acabado liso)	130	33.3	0.53	2.75	
Concreto (acabado común)	120				
Concreto monolítico con cimbras deslizantes ($d > 1.25$ m)					0.010 a 0.011
Concreto monolítico bien cimbrado y pulido ($d > 1.25$ m)					0.011 a 0.0123
Concreto monolítico bien cimbrado y sin pulir ($d > 1.25$ m)					0.014 a 0.015
Concreto con acabado tosco ($d > 1.25$ m)					0.015 a 0.017
Concreto con juntas de macho y campana ($d > 0.8$ m)					0.0105 a 0.012
Concreto con juntas toscas ($d > 0.5$ m)					0.0125 a 0.014
Concreto con juntas toscas ($d < 0.5$ m)					0.014 a 0.017
Tubos de barro vitrificado (drenes)	110				0.011
Túneles perforados en roca sin revestimiento					0.025 a 0.040
Madera cepillada o en duelas	120				0.0105 a 0.012

Fuentes: Referencia [9], [16] y [19]

Si se desea emplear el **sistema inglés** (h_f , D y L en pies; Q en pie^3/s ; U en pies/s), las fórmulas respectivas son las siguientes

$$h_f = \frac{4.64}{C_H^{1.85}} \frac{Q^{1.85}}{D^8} L \quad (2.77)$$

$$Q = 0.436 C_H \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.541} D^{2.62} \quad (2.78)$$

$$U = 0.55 C_H \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.541} D^{0.62} \quad (2.79)$$

$$D = \frac{1.373}{C_H^{0.381}} Q^{0.381} \left(\frac{L}{h_f} \right)^{0.206} \quad (2.80)$$

En el continente europeo es más frecuente el empleo de una fórmula monómica, en la cual no sólo el coeficiente sino también los exponentes son variables según el material. A veces se la encuentra bajo el nombre de **fórmula de Scimemi** ya que fue este investigador italiano uno de los que más contribuyó a su determinación. En los manuales de hidráulica lo más frecuente es encontrarla en su expresión para el gasto

$$Q = c \left(\frac{h_f}{L} \right)^{m_1} D^{m_2} \quad (2.81)$$

Valores de coeficientes c , así como de los exponentes m_1 y m_2 , también se pueden consultar en la tabla 2.5. Para calcular la velocidad media, la pérdida o el diámetro, las expresiones son las siguientes

$$U = \frac{4c}{\pi} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{m_1} D^{(m_2-2)} \quad (2.82)$$

$$h_f = \frac{1}{c^{1/m_1}} \frac{Q^{1/m_1}}{D^{m_1/m_1}} L \quad (2.83)$$

$$D = \frac{1}{c^{1/m_2}} Q^{1/m_2} \left(\frac{L}{h_f} \right)^{m_1/m_2} \quad (2.84)$$

Esta fórmula tiene, aproximadamente, el mismo campo de uso que la de Hazen – Williams pero es particularmente adecuada para el cálculo de tuberías de **asbesto-cemento** [26], en cuyo caso adquiere la siguiente expresión

$$Q = 50.5 \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.56} D^{2.68} \quad (2.85)$$

Esta ecuación, así como las 2.81 a 2.84 con los datos de la tabla 2.5, son ciertas para h_f , D y L en metros, Q en m^3/s y U m/s .

Por último, otra fórmula muy difundida es la de Manning–Strickler. Esta tiene su origen remoto en la ecuación de Chezy, que fue propuesta en 1750 para el cálculo de canales (ver tabla 2.4); con posteridad distintos investigadores se preocuparon por evaluar el coeficiente C empleado por Chezy; de éstos, los suizos Ganguillet y Kutter obtuvieron una ecuación bastante precisa expresando C en función de otro coeficiente: n , que es función de la rugosidad. El problema de la fórmula de Ganguillet y Kutter es que es muy compleja y además incluye un denominador polinomial. Fue el escocés Manning quien encontró una expresión monómica bastante buena, para C en función del mismo coeficiente n , llamado indistintamente coeficiente de Kutter o de Manning. A pesar de que el objetivo de estos investigadores estaba orientado al cálculo de canales, la fórmula puede aplicarse también a tubos a presión. Ahora bien, como en general los canales son conducciones de gran caudal y de contorno áspero, la fórmula de Manning–Styrickler es adecuada precisamente para el cálculo de tuberías de gran diámetro o con materiales rugosos o, dicho en términos más científicos, con turbulencia plenamente desarrollada. La expresión para la velocidad media es:

$$U = \frac{1}{n} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3} = \frac{0.4}{n} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{1/2} D^{2/3} \quad 7 \quad (2.86)$$

La expresión del gasto resultará de multiplicar la anterior por el área $A = \pi D^2/4$

$$Q = \frac{A}{n} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3} = \frac{0.31}{n} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{1/2} D^{5/3} \quad (2.87)$$

Y finalmente, las de la pérdida y el diámetro serán

$$h_f = 10.34 n^2 \frac{Q^2}{D^{16/3}} L \quad (2.88)$$

$$D = 1.55 n^{3/8} Q^{3/8} \left(\frac{L}{h_f} \right)^{3/16} \quad (2.89)$$

⁷ Se ha simbolizado con una letra n (pequeña) el exponente del gasto en la fórmula de pérdidas; sin embargo, también se emplea la n (normal) para el coeficiente de Manning debido a que así es como se lo designa prácticamente en toda la bibliografía. Se ruega al lector prestar atención a esto para evitar confusiones.

El coeficiente n también puede extraerse de la tabla 2.5 para diversos materiales y, al igual que en los casos anteriores, las fórmulas que acaban de presentarse son válidas para h_f , D y L en metros, Q en $m^{3/s}$ y U en m/s .

Si se compara la 2.88 con la 2.70 puede verse que:

$$\begin{aligned} k &= 10.34 \, n^2 \\ n &= 2 \\ n' &= {}^{16}_3 = 5.33 \\ a &= 10.34 \, n^2 \, L_p^{5.33} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Se harán algunos comentarios acerca de los exponentes n y n' , de las fórmulas de Darcy – Weisbach, Hazen – Williams y Manning – Strickler (expresiones 2.71, 2.76 y 2.90):

- n , que es el exponente del gasto en la ecuación de la pérdida, oscila entre 1.85 y 2; en otras fórmulas empíricas llega a valores tan bajos como 1.7, siempre para flujo turbulento. Esto va de acuerdo con la experiencia de Hagen (apartado 2.2, incisos c y d), según la cual la pérdida en régimen turbulento es proporcional a la velocidad media elevada a un exponente cercano a 2 o exactamente igual a 2 si la turbulencia está plenamente desarrollada.
- n' , que es el coeficiente del diámetro, varía entre 4.85 y 5.33; en otras fórmulas llega a valer 4.7. Esto pone de manifiesto la gran sensibilidad de la pérdida con respecto al diámetro, ya que es inversamente proporcional a la quinta potencia de éste. Esto significa que en el régimen turbulento, a gasto constante, una reducción del diámetro a la mitad hará que la pérdida aumente aproximadamente 32 veces. Esta situación es aún más aguda que la que se produce en flujo laminar, donde la pérdida es inversamente proporcional al diámetro a la cuarta, como se demostró en el apartado 2.3.

Problema resuelto 2.7 Fórmulas empíricas: Resolver los problemas resueltos 2.2 a 2.5; esta vez empleando las fórmulas de Hazen – Williams, Scimemi y Manning – Strickler.

Solución: Los citados problemas han sido resueltos empleando el diagrama de Moody; aquí se buscará el resultado nuevamente mediante el uso de fórmulas empíricas. Se aclara que no se emplearán todas las fórmulas en cada caso sino sólo una o dos de ellas, que se consideren las más adecuadas.

P.R. 2.2 Datos: $Q = 6.5 \text{ l/s}$ $D = 100 \text{ mm}$ $L = 3,500 \text{ m}$
líquido: agua a 10°C
material: acero soldado nuevo
Incógnita: h_f

De acuerdo a la tabla 2.5 el coeficiente C_H de la fórmula de Hazen – Williams puede tomarse igual a 130 ya que se trata de un acero soldado nuevo muy liso

$$h_f = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \frac{Q^{1.85} L}{D^{4.85}} \quad (2.72)$$

$$h_f = \frac{10.68 \times 0.0065^{1.85} \times 3,500}{130^{1.85} \times 0.1^{4.85}} = 29.2 \text{ m}$$

La discrepancia con el cálculo resultante del diagrama de Moody es del 2.5%.

P.R. 2.3

Datos: $h_f = 25 \text{ m}$ $D = 150 \text{ mm}$ $L = 750 \text{ m}$
 líquido: agua a 10°C
 material: asbesto – cemento
 Incógnita: Q

El coeficiente C_H de la fórmula de Hazen – Williams para asbesto – cemento es de 140 (tabla 2.5)

$$Q = 0.278 C_H \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.541} D^{2.62} \quad (2.73)$$

$$Q = 0.278 \times 140 \left(\frac{25}{750} \right)^{0.541} 0.15^{2.62} = 0.0429 \text{ m}^3/\text{s} = 42.9 \text{ l/s}$$

La discrepancia con el resultado obtenido por el diagrama de Moody es del 3%.

La fórmula de Scimemi es adecuada para el cálculo de conducciones de asbesto-cemento, como se ha dicho en el texto

$$Q = 50.5 \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.56} D^{2.68} \quad (2.85)$$

$$Q = 50.5 \left(\frac{25}{750} \right)^{0.56} 0.15^{2.68} = 0.0465 \text{ m}^3/\text{s}$$

La discrepancia es ahora del 5%.

P.R. 2.4

Datos: $h_f = 12 \text{ m}$ $Q = 60 \text{ l/s}$ $L = 1,080 \text{ m}$
 líquido: agua a 20°C
 material: fierro fundido con 10 años de uso
 Incógnita: D

El fierro fundido es uno de los materiales más probados con la fórmula de Hazen – Williams desde los comienzos de las investigaciones que le dieron origen. El valor de C_H para ese material con diez años de uso es de 110 (tabla 2.5)

$$D_r = \frac{1.629}{C_H^{0.381}} Q^{0.381} \left(\frac{L}{h_f} \right)^{0.206} \quad (2.75)$$

$$D_r = \frac{1.629}{110^{0.381}} 0.06^{0.381} \left(\frac{1,080}{12} \right)^{0.206} = 0.235 \text{ m}$$

En este caso el diámetro obtenido por medio de esta fórmula difiere en menos del 1% del calculado por el diagrama de Moody y, por cierto, el diámetro comercial a adoptar es el mismo.

P.R. 2.5

Datos:

$$Q = 1.12 \text{ m}^3/\text{s} \quad L = 2000 \text{ m}$$

tubo rectangular de 0.8 x 0.9 m

$$\left(D_h = 0.847 \text{ m} \right)$$

líquido: agua

material: concreto, acabado común

La fórmula de Hazen – Williams puede emplearse para tubos no circulares, pero en tal caso debe usarse la expresión 2.74 de la velocidad media, ya que la del gasto resulta de multiplicar ésta por el área de un círculo. El coeficiente C_H para este material puede tomarse de 100.

Despejando la pérdida de la 2.74

$$h_f = \frac{6.83}{C_H^{1.85}} \frac{U^{1.85}}{D_h^{1.15}} L$$

La velocidad media, ya fue calculada en el problema 2.5; es de 1.56 m/s,

$$h_f = \frac{6.83 \times 1.56^{1.85}}{100^{1.85} \times 0.843^{1.15}} 2000 = 7.55 \text{ m}$$

Aquí la diferencia alcanza al 16% con respecto al cálculo hecho con el diagrama Moody. La explicación es que la fórmula de Hazen – Williams no es la más conveniente cuando las dimensiones de la conducción son muy grandes. En estos casos resulta más adecuada la fórmula de Manning – Strickler; para concreto con acabado normal el valor del coeficiente n de esta fórmula es de 0.013. También en este caso debe partirse de la expresión para la velocidad media

$$U = \frac{1}{n} \left(\frac{D_h}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{1/2} \quad (2.86)$$

$$h_f = \frac{n^2 U^2}{\left(D_h / 4 \right)^{4/3}} L$$

Reemplazando

$$h_f = \frac{0.013^2 \times 1.56^2}{\left(0.8434\right)^{1.33}} \times 2000 = 6.56 \text{ m}$$

En este caso la coincidencia con el diagrama de Moody es sorprendente, sobre todo si el factor de fricción se evalúa con el diámetro efectivo (parte b del problema 2.5); en cuyo caso la diferencia no llega al 1%.

Los resultados obtenidos son satisfactorios, sobre todo si se escoge la fórmula más apropiada a cada caso en función de su respectivo campo de aplicación.

Resumen del capítulo

- * El análisis dimensional demuestra que las pérdidas por fricción en un tubo a presión circular recto pueden evaluarse por la fórmula de Darcy – Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

donde el factor de fricción f depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

- * El número de Reynolds es un parámetro adimensional que relaciona las fuerzas inerciales y las viscosas. Si su valor es inferior a 2,200 el flujo es laminar, si es mayor de 4,000 es turbulento.
- * La fórmula de pérdidas por fricción en régimen laminar puede deducirse teóricamente a partir de la ecuación de Newton de viscosidad. El factor de fricción resulta ser $f = \frac{64}{Re}$; si se combina esta expresión con la de Darcy–Weisbach se obtiene la fórmula de Hagen–Poiseuille

$$h_f = \frac{32 \mu U L}{\gamma D^2}$$

- * En flujo turbulento el factor de fricción se obtiene en forma experimental; la fórmula adecuada para su evaluación en tubos comerciales es la de Coolebrook y White

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} + 0.269 \frac{\epsilon}{D} \right)$$

- * En tubos lisos las pérdidas por fricción se deben sobre todo a la viscosidad y en tubos rugosos, con turbulencia plenamente desarrollada, a la rugosidad.
- * La rugosidad de tubos comerciales puede incrementarse con el tiempo por envejecimiento, sobre todo por efecto de la corrosión e incrustaciones.
- * El diagrama de Moody es una ayuda gráfica que permite obtener el factor de fricción de la ecuación de Darcy–Weisbach para cualquier tipo de tubo, líquido y régimen de flujo, razón por la cual se le denomina diagrama universal para el cálculo de tuberías.

- * El cálculo de la pérdida por el diagrama de Moody es directo, si la incógnita es el gasto o el diámetro se requiere un procedimiento iterativo.
- * Existen formas alternativas del diagrama de Moody que permiten obtener el gasto y el diámetro en forma directa.
- * Para tubos de sección no circular pueden emplearse la ecuación de Darcy – Weisbach y el diagrama de Moody, reemplazando el diámetro por el diámetro hidráulico, que se calcula como el cuádruple del área sobre el perímetro de la sección.
- * Las fórmulas empíricas constituyen una alternativa para el cálculo hidráulico de tubos a presión, no son necesariamente más imprecisas que el diagrama de Moody pero son más restringidas en su campo de aplicación. Además no son dimensionalmente congruentes. Las fórmulas de Hazen–Williams, Scimemi y Manning–Strickler son tres de las más usadas.

Problemas propuestos

2.1 ¿Cuál será el número de Reynolds en un tubo de 0.003 m de diámetro, si a través de él fluye agua a 20°C a 0.35 m/s?

2.2 Calcular: a) el número de Reynolds y b) el factor de fricción f , para el flujo de 50 litros por minuto de agua a 25°C a través de un tubo liso, con un diámetro $D = 75 \text{ mm}$.

2.3 A través de un tubo horizontal liso de diámetro $D = 0.009 \text{ m}$ y longitud $L = 69 \text{ m}$ fluye agua a 10°C. La diferencia de presiones entre los extremos del tubo es de 1,900 Pa. Si la viscosidad cinemática del agua es $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, determínese la velocidad media, el gasto y el número de Reynolds.

2.4 Determinar el factor de fricción resultante al aumentar el gasto de agua, en un tubo liso dado, desde $0.11 \text{ m}^3/\text{s}$ hasta $0.7 \text{ m}^3/\text{s}$. Considere que $f = 0.06$ cuando $Q = 0.11 \text{ m}^3/\text{s}$.

2.5 ¿Cuál es el diámetro mínimo que debe tener un tubo de asbesto-cemento para que funcione como *hidráulicamente liso* si su número de Reynolds es $Re = 400,000$?

2.6 Establezca cuál es la dirección del flujo en el tubo liso de la figura 2.27, así como el gasto a través del mismo; considérese como $\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1.4 \times 10^{-2} \text{ kg/m s}$.

2.7 Considere la figura 2.28. Determinar lo siguiente:

- la pérdida h_f
- el factor de fricción f
- la rugosidad relativa ϵ/b

El material de la tubería es PVC.

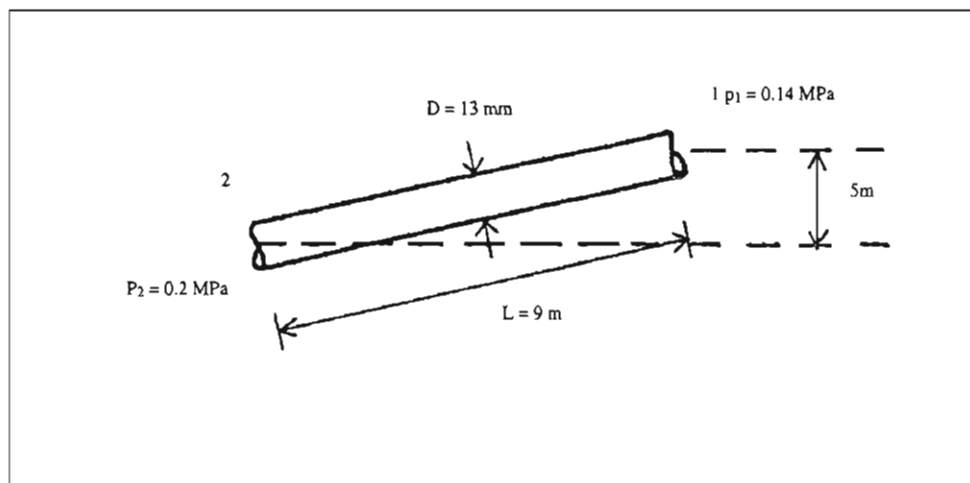


Figura 2.27: Problema propuesto 2.6.

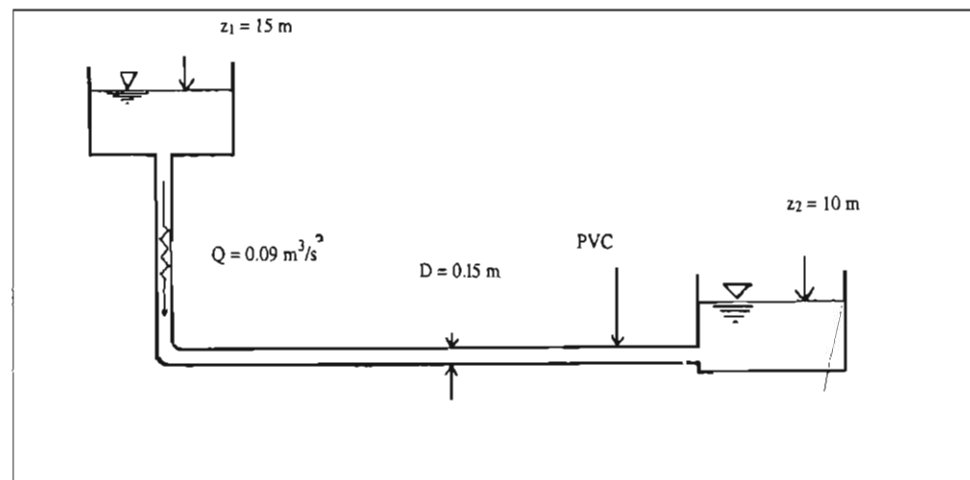


Figura 2.28: Problema propuesto 2.7.

2.8 Se hace un ensayo de campo para determinar la rugosidad absoluta de un material; el diámetro del tubo es de 600 mm , el gasto es de 600 l/s , el líquido es agua a 20°C y se mide una pérdida unitaria $S_f = 0.008$. ¿Cuál será el resultado del ensayo?

- 2.9** Considere el flujo de un aceite de $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ y $\nu = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ a través de un ducto horizontal cuadrado de $50 \times 50 \text{ mm}$ con $U = 4 \text{ m/s}$. Calcular lo siguiente:
- la caída de presión ΔP , por cada 100 m de longitud del ducto.
 - ΔP , si la sección transversal del ducto tiene ahora un área de $30 \times 100 \text{ mm}$.
 - ΔP , si el área de la sección transversal del ducto corresponde a la de un triángulo equilátero de 3 cm de lado.
- 2.10** Se requiere comparar las pérdidas primarias por cada 100 m de longitud, en un tubo liso de diámetro $D = 25 \text{ mm}$, por el cual fluye agua a 20°C ; el gasto es de: a) 160 l/h ; b) 680 l/h .
- 2.11** ¿En cuánto debe aumentarse el diámetro de un tubo de fierro fundido nuevo de 300 mm para que manteniéndose un número de Reynolds de 100,000 se obtenga el mismo factor de fricción, si la rugosidad aumenta en un 100%?
- 2.12** Calcular la pérdida en un tubo de diámetro $D = 100 \text{ mm}$ construido en acero galvanizado nuevo, de longitud $L = 280 \text{ m}$ que transporta un gasto de $Q = 15 \text{ l/s}$ de agua a 10°C .
- 2.13** A través de un tubo horizontal de cobre fluye agua a 7°C , siendo la velocidad media de 1.4 m/s . Calcúlese la diferencia de presiones que se necesita entre los extremos del tubo, si éste tiene un diámetro $D = 0.03 \text{ m}$ y una longitud $L = 49 \text{ m}$. Emplear para este cálculo varias de las fórmulas de la tabla 2.4 que se consideren adecuadas para el caso y comparar sus resultados.
- 2.14** Una tubería de acero comercial de 0.01 m de diámetro conduce un líquido de $\nu = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ a una velocidad media $U = 0.49 \text{ m/s}$. Se desea determinar la pérdida que se produce en un tramo de longitud $L = 1 \text{ km}$.
- 2.15** Verificar la pérdida por fricción que ocurre en una tubería de $D = 200 \text{ mm}$ que transporta agua a 10°C a razón de $Q = 40 \text{ l/s}$, en una longitud de 1,500 m. La tubería es de acero galvanizado.
- 2.16** Se extrae agua de un pozo a una velocidad media de 2.3 m/s . El diámetro del tubo es de 350 mm. La flecha de la bomba posee un diámetro de 100 mm y, como es lógico, recorre al tubo longitudinalmente, por lo cual la sección de flujo es de forma anular. Calcular el gasto y la pérdida si $\epsilon = 0.1 \text{ mm}$, $L = 85 \text{ m}$ y la temperatura del agua es de 10°C . (Desperdiciar el efecto localizado de las juntas de la flecha).
- 2.17** Un tubo de acero comercial nuevo de 250 mm de diámetro transportará agua a 15°C . Si se desea que la pérdida por fricción sea de 1.3 m por cada 100 m de tubería, calcular el gasto que fluirá por el tubo.
- 2.18** Calcular el gasto que conduce una tubería horizontal de acero comercial ($\epsilon = 0.1 \text{ mm}$) y diámetro $D = 100 \text{ mm}$, en una longitud $L = 200 \text{ m}$. El líquido es un aceite de viscosidad cinemática $\nu = 2.2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; la presión en la entrada del tubo es de 40 kPa y la descarga en la salida es a la atmósfera.
- 2.19** La figura 2.29 muestra un sistema del cual se requiere calcular el valor del gasto que fluye a través del mismo, tomando sólo en consideración las pérdidas por fricción. El tubo está formado por un solo tramo vertical y su diámetro interno es de 5 mm.

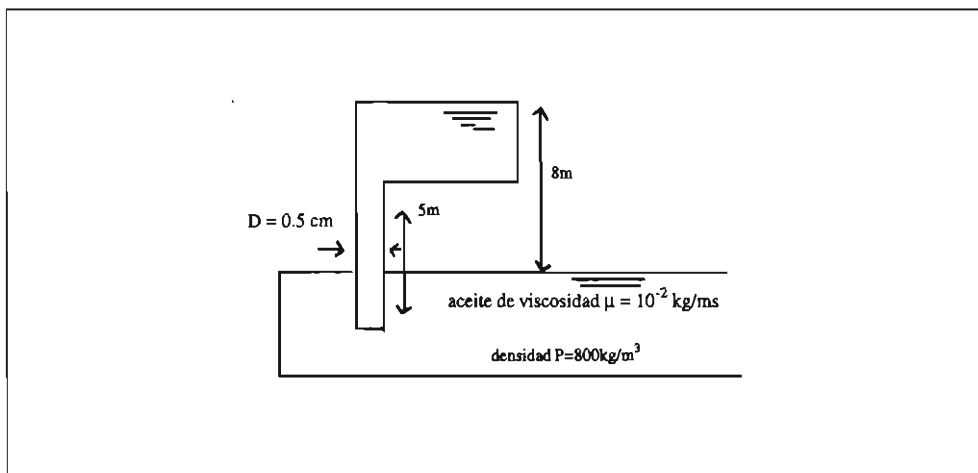


Figura 2.29: Problema propuesto 2.20.

2.20 ¿Qué cantidad de agua a 20°C se puede conducir en un tubo de asbesto-cemento con diámetro $D = 250 \text{ mm}$ y $1,110 \text{ m}$ de longitud, si la pérdida es de $h_f = 16 \text{ m}$?

2.21 Para la conducción de $0.3 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua a 30°C a lo largo de $1,000 \text{ m}$ de trayecto, se requiere determinar el diámetro de una tubería nueva de hierro fundido. La máxima pérdida de energía permitida es de 1.2 m .

2.22 Calcular el diámetro de una tubería de 850 m de longitud que conduce 60 l/s de agua a 20°C con una pérdida $h_f = 9.3 \text{ m}$. Emplear la fórmula de Hazen-Williams tomando $C_H = 105$

2.23 Una tubería de 300 m de longitud transporta $0.02 \text{ m}^3/\text{s}$ de aceite de $\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 1.4 \text{ kg/ms}$. Determinar el diámetro para dicha tubería, la cual debe vencer una pérdida por fricción de 6.6 m .

2.24 A través de un tubo de hierro fundido se conducen 160 l/s de agua a temperatura ambiente. Suponiendo que $S_f = 0.003$, calcular el diámetro necesario:

- a) empleando el diagrama Moody ($\epsilon = 0.00015 \text{ m}$)
- b) empleando la fórmula de Hazen - Williams ($C_H = 130$)
- c) empleando la fórmula de Manning - Strickler ($n = 0.01$).

2.25 ¿Qué diámetro se requiere para transportar un gasto $Q = 60 \text{ l/s}$ de agua a 20°C en una longitud $L = 950 \text{ m}$ en un tubo de PVC, si se tiene una pérdida $h_f = 22 \text{ m}$?

- a) Emplear el diagrama de Moody
- b) Emplear el diagrama de Rouse modificado
- c) Emplear la fórmula de Hazen - Williams
- d) Emplear la fórmula de Scimemi.

2.26 Se requiere conducir 260 l/s de un líquido cuya viscosidad cinemática es $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ a través de una distancia de 2.8 km con una pérdida primaria de 20 m . Determinar cuál debe ser el valor del diámetro si el tubo es de PVC.

CAPITULO 3
PERDIDAS SECUNDARIAS
ACCESORIOS EN TUBERIAS

3. PERDIDAS SECUNDARIAS. ACCESORIOS EN TUBERIAS

- 3.1 Naturaleza física de las pérdidas secundarias.
- 3.2 Evaluación de las pérdidas secundarias.
- 3.3 Pérdidas en expansiones y salidas.
- 3.4 Pérdidas en reducciones y entradas.
- 3.5 Pérdidas en codos y curvas.
- 3.6 Pérdidas en uniones y bifurcaciones.
- 3.7 Pérdidas en válvulas.
 - 3.7.1 Válvula de compuerta.
 - 3.7.2 Válvulas de globo, de codo y de aguja.
 - 3.7.3 Válvulas de mariposa y esférica.
 - 3.7.4 Válvulas antirretorno.
 - 3.7.5 Válvulas de aire, alivio y reductora de presión.
- 3.8 Pérdidas por medidores.
- 3.9 Otros accesorios.
- 3.10 Tendencias modernas en la evaluación del coeficiente K.

3.1 Naturaleza física de las pérdidas secundarias

Las pérdidas secundarias en tuberías, también llamadas *pérdidas menores*, *pérdidas locales* o *pérdidas por accesorios*, ya fueron presentadas en el apartado 1.3.2. Su origen, al igual que en el caso de las pérdidas primarias, se debe a la generación de calor provocada por el roce mecánico entre partículas; sin embargo, tanto por su análisis teórico como por su forma de evaluación, difieren notablemente de éstas.

Para que se produzca una pérdida secundaria debe existir, en algún punto de la conducción, una singularidad que provoque una alteración en el patrón unidimensional y paralelo del flujo. En la figura 3.1.b se aprecia un ejemplo; una expansión brusca hace que las líneas de corriente se abran; en la región del flujo dominada por este accidente ya no es válida la hipótesis de flujo unidimensional, que es la que prevalece en la parte a de la figura. Pero además se observa otro fenómeno, la línea de corriente cercana al contorno de la conducción no puede continuar pegada a éste a partir de la arista A; por un simple principio de física elemental, la partícula requeriría de una aceleración infinita para doblar en un ángulo de 90°. ¿Qué ocurrirá entonces? Tal como lo ilustra la figura la línea de corriente se desprenderá del borde. Este fenómeno recibe el nombre de *separación*, *desprendimiento* o, más específicamente, *separación de la capa límite*¹. La zona de separación no se prolonga indefinidamente; en una posición B, separada de A en una distancia del orden de las dimensiones transversales del tubo, la línea de corriente extrema vuelve a encontrarse con el contorno sólido. De esta manera el flujo principal no queda limitado exactamente por el contorno sino que entre ambos existirán zonas como la indicada como ABC en la figura. En estas regiones del campo de flujo, se desarrolla un *flujo secundario*, que está caracterizado por una turbulencia más intensa que la que se observa en el flujo principal, los remolinos son mayores y la disipación de energía debida a la turbulencia llega a alcanzar valores importantes en un tramo muy corto de conducción. La

¹ El tema de *capa límite* no es tratado en este texto. Si el lector desconoce el tema, en la referencia [13] podrá encontrar un tratamiento muy accesible del mismo.

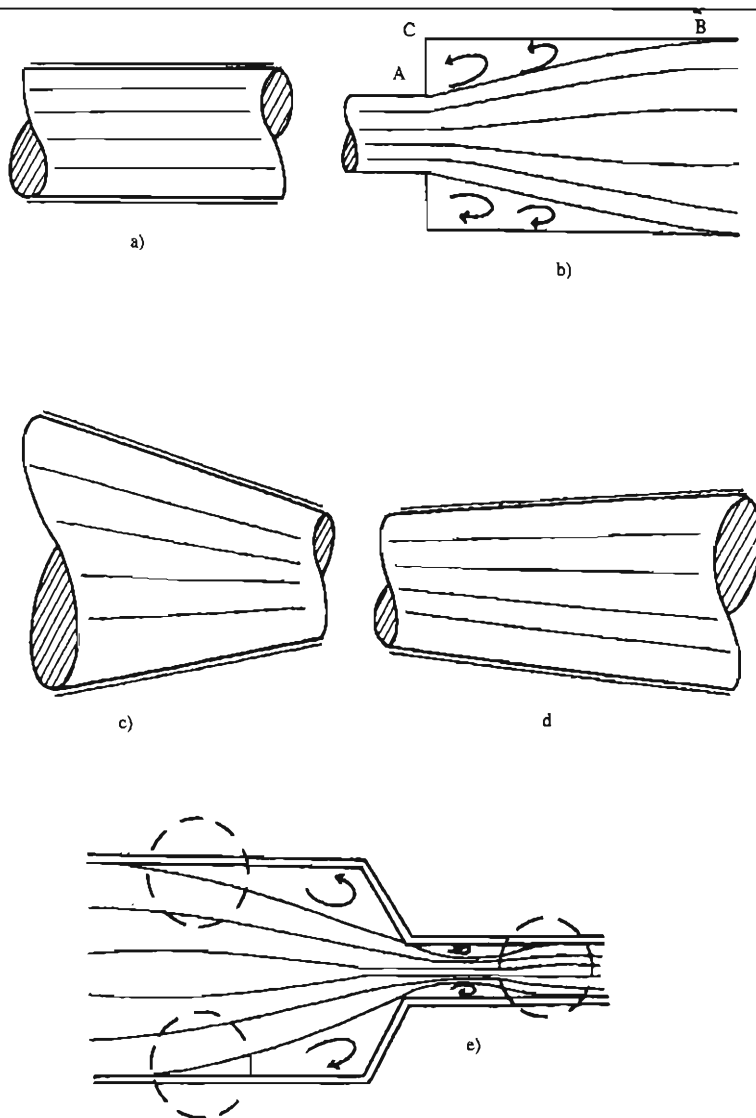


Figura 3.1: a) Flujo uniforme en un tubo. b) expansión brusca con formación de flujo secundario. c) flujo convergente. d) divergencia suave. e) flujo convergente con zonas de divergencia y separación.

frontera entre el flujo principal y el secundario, representada por la línea de corriente extrema, no es rígida; en efecto, esto se puede comprobar experimentalmente si en un tubo transparente se inyecta un colorante en la región ABC; el resultado será que durante algunos segundos la sustancia quedará confinada a esa zona, pero poco a poco se irá disolviendo en el flujo principal; esto es una consecuencia de la propia turbulencia.

Hay un aspecto que está invariablemente ligado al fenómeno de separación y que es la *divergencia* del flujo. En efecto, puede observarse que en las inmediaciones del punto A, las líneas de corriente son divergentes. Si el flujo es convergente en todo el campo de flujo, como es el caso de la parte c de la figura 3.1, no se observará separación. Tampoco ocurrirá el fenómeno si la divergencia es suave, como se aprecia en la parte d. Finalmente, la parte e presenta un caso en el que el flujo es en general convergente, pero existen zonas, que se indican con circunferencias punteadas, en las que hay una divergencia localizada, suficiente para provocar el desprendimiento. No es la primera vez que se hace referencia al tema en este trabajo; cuando se habló del teorema de Bernoulli en el apartado 1.3.2, se dijo que para poder despreciar las pérdidas se requiere que el flujo no sea divergente, a menos que dicha divergencia sea suave. Se aprovechará aquí nuevamente para enfatizar algo que se dijo también en esa oportunidad y es que el flujo divergente implica la transformación de energía cinética en potencial por la desaceleración del flujo y este fenómeno mecánico está asociado a pérdidas de energía mecánica más importantes que las que requiere el proceso inverso.

Haciendo una síntesis de lo dicho en este apartado se puede hacer un listado de los *elementos que caracterizan a las pérdidas secundarias en tuberías*:

- Presencia de una singularidad que provoca una curvatura pronunciada del flujo.
- Zonas de flujo bruscamente divergentes en las proximidades del contorno sólido.
- Desprendimiento de la capa límite.
- Formación de zonas de flujo secundario con fuerte turbulencia.

En términos prácticos, las singularidades que pueden provocar este fenómeno son los accesorios en tuberías, los cuales ya fueron presentados casi al principio del primer capítulo. En la figura 3.2 se pueden observar algunos accesorios y la forma en que se generan las pérdidas en cada uno de ellos.

3.2 Evaluación de las pérdidas secundarias

Al igual que se ha hecho en el capítulo anterior, se echará mano del análisis dimensional para la evaluación de las pérdidas secundarias. Se verá más adelante que para algunos accesorios la fórmula particular puede obtenerse en forma teórica, pero en general se requiere de la experimentación.

De las variables intervinientes en el problema, un grupo importante lo constituyen las que definen la geometría del accesorio, las cuales pueden ser muchas. Una expansión brusca como la de la figura 3.3.a, por ejemplo, quedará completamente definida si se conocen los diámetros D_1 y D_2 , pero si es gradual como en la parte b de la figura, deberá considerarse además el ángulo θ ; sin embargo la situación se complica aún más si el contorno de la expansión es redondeado en vez de ser recto como se aprecia en la parte c. Cuando la cantidad de variables es muy grande, la de parámetros también lo es y entonces el problema se torna inmanejable. La solución es entonces suponer que el accesorio tiene *forma geométrica* fija, con lo cual bastará una sola variable para definir el *tamaño*. Por ejemplo las dos expansiones de la figura 3.4 poseen la misma forma; es suficiente con una variable, uno de los diámetros por ejemplo, para definir completamente la geometría. Esta es la base de la *teoría de modelos*, que permite extender los

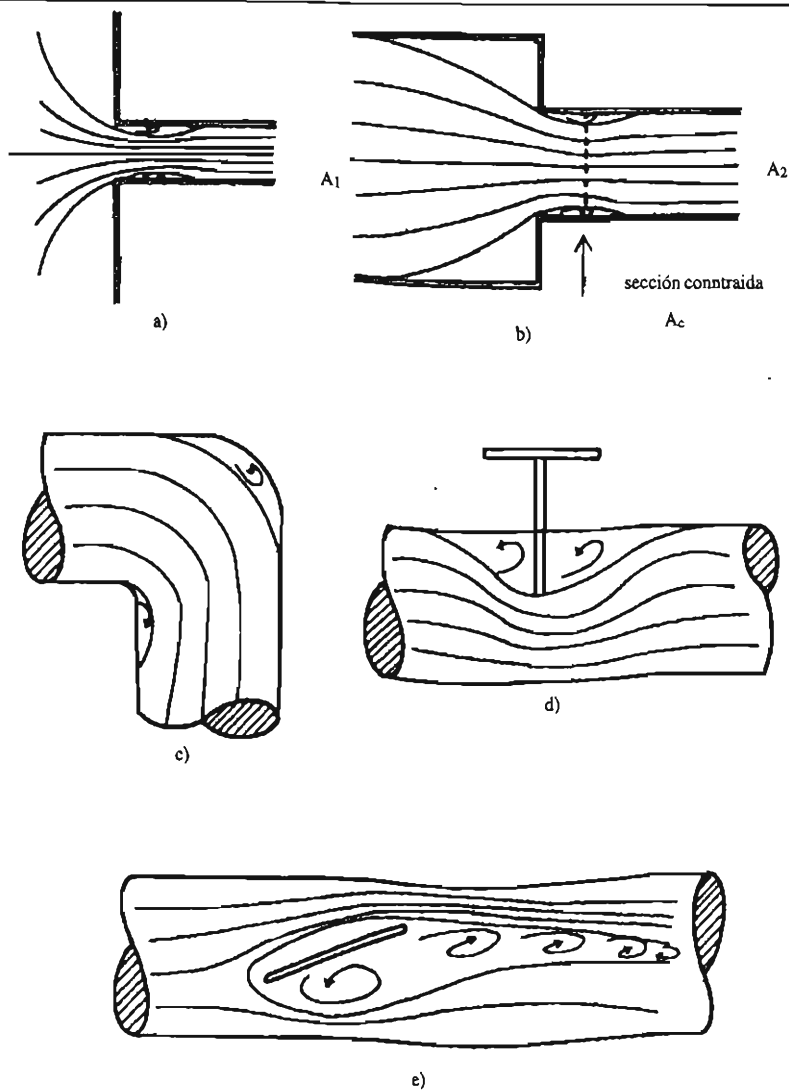


Figura 3.2: Patrón de flujo en accesorios diversos a) entrada. b) reducción brusca. c) codo normal. d) válvula de compuerta. e) válvula de mariposa (ambas válvulas están semiabiertas).

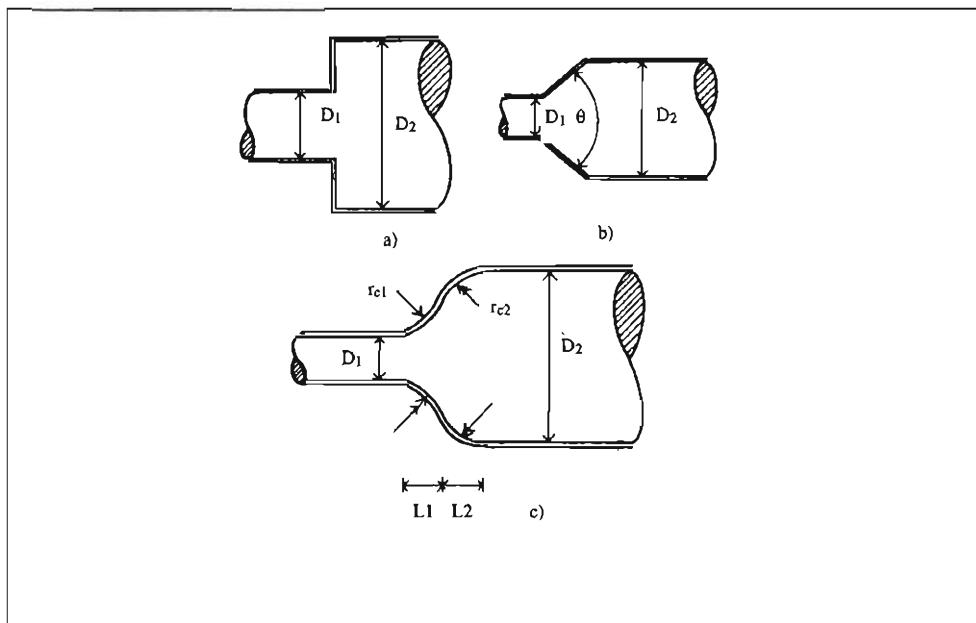


Figura 3.3: Variables geométricas que definen un accesorio a) expansión a ángulos rectos. b) expansión gradual troncocónica. c) expansión a contornos redondeados.

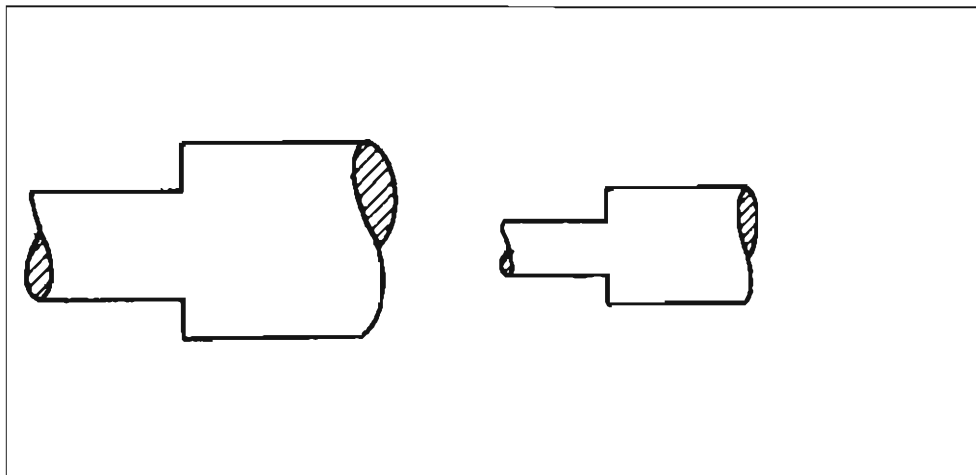


Figura 3.4: Dos accesorios de idéntica forma y diferente tamaño.

resultados de ensayos en un modelo a otros casos que tengan la misma forma geométrica aunque su tamaño sea diferente.

Las demás variables a considerar son la velocidad media U , las propiedades del fluido: densidad ρ y viscosidad μ y por supuesto la propia pérdida secundaria h_a (al igual que en el caso de las pérdidas primarias se la multiplicará por el peso específico γ del líquido, de esta manera se considera también la influencia de la gravedad). Algunos trabajos de investigación reportan la posible influencia de la rugosidad sobre las pérdidas secundarias; sin embargo no hay mucha información al respecto y lo más probable es que esta influencia no sea muy apreciable ya que el tramo de tubo que ocupa un accesorio es muy corto. Un factor que sí puede tener influencia considerable es la configuración del flujo *aguas arriba*² del accesorio; el siguiente es un ejemplo que explica la idea, el cual se ilustra en la figura 3.5; no provocan la misma pérdida dos codos de 90° separados por un tramo de tubo que un retorno de 180°. Por ello en lo que sigue se supondrá que la corriente en la llegada al accesorio es paralela y libre de macroturbulencias.

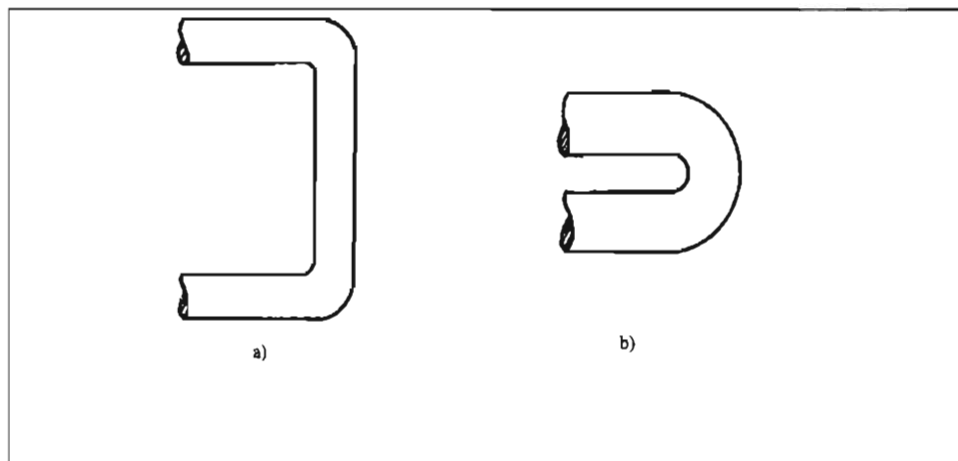


Figura 3.5: a) Dos codos normales a 90° separados por un tramo recto. b) retorno de 180°.

En síntesis, para un accesorio de forma fija, las variables intervinientes son las siguientes:

$$\gamma, h_a, D, U, \rho, \mu. \quad (3.1)$$

El diámetro del tubo representa el tamaño del accesorio. Se trata de cinco variables en las cuales están incluidas las tres dimensiones físicas fundamentales; por lo tanto se obtendrán en principio dos parámetros adimensionales, que son los siguientes:³

² Es frecuente en hidráulica emplear la expresión *aguas arriba* para referirse al sentido de donde procede el flujo y *aguas abajo* para el sentido a donde se dirige.

³ No se incluirá en este caso la deducción correspondiente, la cual es muy parecida a la seguida en el apartado 2.1 para las pérdidas primarias.

$$\frac{\gamma h_a}{\rho U^2}, \frac{\rho U D}{\mu} \quad (3.2)$$

De acuerdo al teorema de Buckingham se puede expresar uno de estos grupos en función del otro:

$$\frac{\gamma h_a}{\rho U^2} = f_1 \left(\frac{\rho U D}{\mu} \right)$$

El parámetro entre paréntesis no es sino el número de Reynolds. Si se reemplaza $\gamma_p = g$ y se despeja h_a se obtiene:

$$h_a = f_1(Re) \frac{U^2}{g}$$

Como se hizo en otra ocasión se multiplicará y dividirá el segundo miembro por 2 para que aparezca la energía cinética:

$$h_a = 2 f_1(Re) \frac{U^2}{2g} \quad (3.3)$$

Ahora bien, recuérdese que para obtener esta ecuación se hizo la restricción de que la forma del accesorio es fija; para una expresión más general es preciso tener en cuenta la forma geométrica dentro de los parámetros

$$h_a = f(\text{forma}, Re) \frac{U^2}{2g} \quad (3.4)$$

$$\text{Llamando} \quad k = f(\text{forma}, Re) \quad (3.5)$$

$$\text{resulta} \quad h_a = K \frac{U^2}{2g} \quad (3.6)$$

La *forma* del accesorio puede expresarse en casos sencillos mediante un conjunto de parámetros adimensionales; esto se verá conforme se analicen en detalle distintos casos. En cuanto al número de Reynolds, algunos investigadores se han preocupado por evaluar su influencia sobre el coeficiente K para diversos accesorios. Normalmente K es decreciente con el número de Reynolds, marcadamente si el régimen es laminar y en pequeña medida cuando es turbulento; cuando la turbulencia es plena deja de tener importancia. En los casos que se analizan a continuación se considera que el flujo es turbulento; el número de Reynolds está ausente en la gran mayoría de las tablas, gráficas y fórmulas que se emplean para evaluar K . Sin embargo en el apartado 3.10 se volverá a hablar sobre el tema.

3.3 Pérdidas en expansiones y salidas

Una *expansión* o *ensanchamiento* es el accesorio que se emplea para aumentar el diámetro de la conducción, o sea para acoplar un tramo de cierto diámetro con otro diámetro mayor aguas abajo de aquél. Una *salida* es la descarga final del tubo, ya sea a la atmósfera o a otra masa líquida en reposo o en movimiento. La razón de presentar estos dos accesorios en forma conjunta es que una salida no es más que un caso particular de expansión en el cual el diámetro del tubo de aguas abajo tiende a infinito.

La *expansión brusca*, cuyo esquema se presenta en la figura 3.6, es un accesorio cuya ecuación de pérdidas puede obtenerse en forma teórica, con muy buen grado de aproximación a la realidad. Es la llamada fórmula de Borda, en honor al científico italiano que la obtuvo por primera vez. A continuación se desarrolla la deducción de la misma, para lo cual deben aplicarse las ecuaciones de conservación al volumen de control que se demarca en la misma figura. Dicho volumen está comprendido entre las secciones A_1 , inmediatamente antes de la expansión y A_2 , que corresponde al tramo de aguas abajo. Ambas secciones están ubicadas en zonas donde el flujo es unidimensional. De esta manera podrán aplicarse las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en las acostumbradas expresiones sencillas.

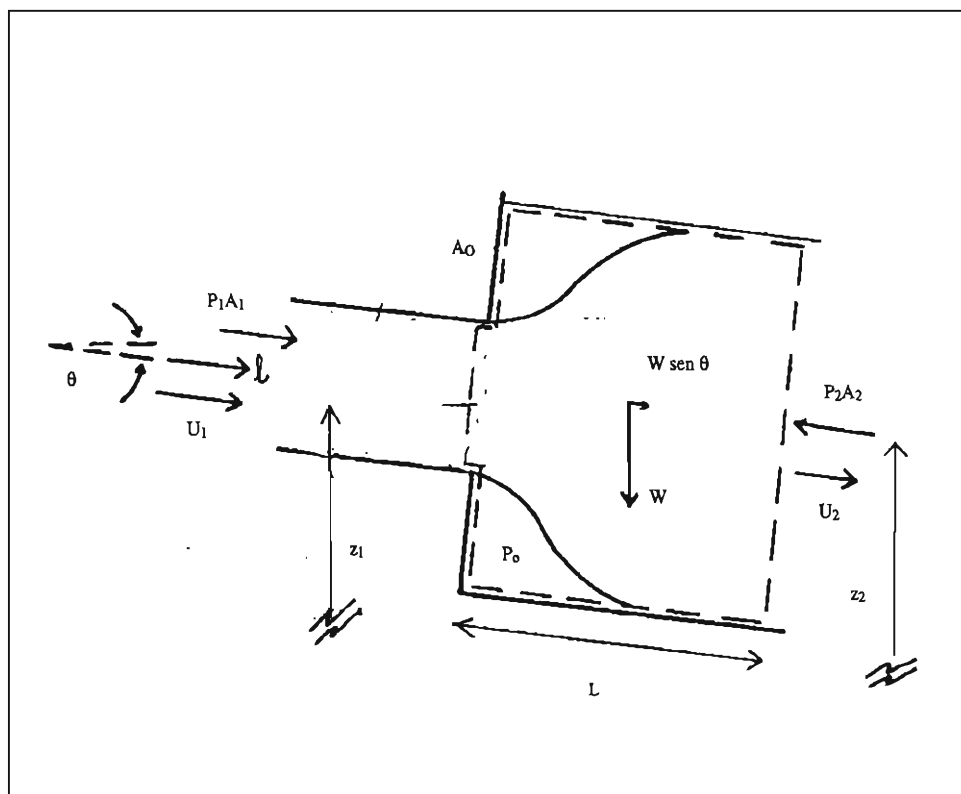


Figura 3.6: Expansión brusca, aplicación de la fórmula de Borda.

La ecuación de continuidad adopta la forma

$$U_1 A_1 = U_2 A_2 \quad (3.7)$$

Para la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se empleará la expresión de la fuerza dinámica aplicada por el líquido al contorno sólido (fórmula 1.42 del problema resuelto 1.2)

$$\bar{F}_d = \rho Q (\bar{U}_1 - \bar{U}_2) + (\bar{P}_1 A_1 + \bar{P}_2 A_2) + \bar{W} \quad (3.8)$$

y finalmente la ecuación de conservación de la energía será:

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right) = h_{ex. b} \quad (3.9)$$

$h_{ex. b}$ es la pérdida por expansión brusca

La expresión 3.8 de cantidad de movimiento es una ecuación vectorial, de cuyas componentes bastará considerar la que posee la dirección del flujo l ; analizando término por término:

- La componente de la fuerza dinámica \bar{F}_d en dirección l es el empuje aplicado sobre la placa anular A_o ; por tratarse de una expansión a ángulos rectos, dicha placa es perpendicular al flujo y su extensión es igual a la diferencia $A_2 - A_1$. Cualquier resultante de esfuerzos tangenciales sobre el contorno cilíndrico del volumen de control podrá despreciarse por tratarse de un tramo muy corto de tubo. Si se llama p_o a la presión que se ejerce sobre el área A_o resulta, como conclusión de lo dicho aquí

$$F_{dl} = -p_o (A_2 - A_1)$$

el signo menos se debe a que el sentido de esta fuerza es opuesto al del flujo.

- Las velocidades U_1 y U_2 tienen la misma dirección del flujo y sentido positivo.
- Las fuerzas $\bar{p}_1 A_1$ tiene la dirección del flujo y sentido positivo, mientras que $\bar{p}_2 A_2$ tiene sentido negativo.
- La componente del peso en la dirección l es:

$$W_l = W \sin \theta$$

donde θ es el ángulo que forma el eje del tubo con la horizontal.

Aplicando estas observaciones a la ecuación 3.8 resulta:

$$-p_o (A_2 - A_1) = \rho Q (U_1 - U_2) + (p_1 A_1 - p_2 A_2) + W \sin \theta \quad (3.10)$$

Ahora bien, el peso W es el de un cilindro de base A_2 y longitud L , entonces

$$W \sin \theta = \gamma A_2 L \sin \theta$$

pero además, si se observa la figura, se puede apreciar que

$$L \sin \theta = z_1 - z_2$$

Reemplazando sucesivamente estas expresiones en la 3.10 resulta:

$$-p_o(A_2 - A_1) = \rho Q(U_1 - U_2) + (p_1 A_1 - p_2 A_2) + \gamma A_2(z_1 - z_2)$$

A continuación se dividirá miembro a miembro esta expresión por A_2 . El resultado es:

$$-p_o\left(1 - A_{1/A_2}\right) = \rho \frac{Q}{A_2} (U_1 - U_2) + \left(p_1 A_{1/A_2} - p_2\right) + \gamma (z_1 - z_2)$$

Seguidamente se dividirá por el peso específico γ , con lo que resultará $\rho/\gamma = 1/g$, se reemplazará $Q/A_2 = U_2$ y se supondrá que las presiones p_o y p_1 son iguales; lo que justifica hacer esta última hipótesis es algo que ya se mencionó en una nota al pie del apartado 1.3.4.: La presión en un chorro debe ser igual a la de la masa líquida que lo rodea, porque de lo contrario el flujo sería transversal a él. La nueva expresión es:

$$-\frac{p_1}{\gamma} = \frac{U_2}{g} (U_1 - U_2) - \frac{p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2)$$

Reordenando:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \frac{U_2}{g} (U_2 - U_1)$$

Finalmente, comparando esta ecuación con la conservación de la energía 3.9, resulta

$$h_{ex.b} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} = \frac{U_2}{g} (U_2 - U_1)$$

$$h_{ex.b} = \frac{1}{2g} \left(2U_2^2 - 2U_2U_1 + U_1^2 - U_2^2\right)$$

Finalmente se llega a la expresión:

$$h_{ex.b} + \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} \quad (3.11)$$

conocida como *fórmula de Borda*.

A partir de esta ecuación surge inmediatamente el valor del coeficiente K para una expansión brusca; pero antes hay que acordar cuál de las dos velocidades intervinientes se incluirá en la ecuación 3.6, ya que el valor de K será diferente según que se elija una u otra. En la mayoría de las ayudas de cálculo que existen al respecto se emplea la velocidad del tramo de aguas arriba, o sea la mayor de ambas U_1 . Entonces

$$h_{ex. b} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = K_{ex. b} \frac{U_1^2}{2g} \quad (3.12)$$

de donde:

$$K_{ex. b} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{U_1^2} = \left(\frac{U_1 - U_2}{U_1} \right)^2 = \left(1 - \frac{U_2}{U_1} \right)^2$$

pero por la ecuación de continuidad 3.7 $U_1 U_1 = A_1 U_2$; por lo tanto:

$$K_{ex. b} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (3.13)$$

o bien:

$$K_{ex. b} = \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 \quad (3.14)$$

ya que las áreas son proporcionales al cuadrado de los diámetros.

Esta fórmula, obtenida teóricamente, arroja resultados acordes con la realidad para expansiones bruscas de aristas vivas y turbulencia plenamente desarrollada. En la tabla 3.1 se presentan los valores de $K_{ex. b}$ que surgen de la fórmula 3.14 para distintas relaciones de diámetro.

Como se ha dicho más arriba, una *salida* es el caso límite de una expansión, en la cual la relación D_1/D_2 tiende a cero, ya que puede imaginarse el tanque en el que el flujo desemboca como un tubo de muy grandes dimensiones; de acuerdo con la 3.13 el coeficiente K de una salida será entonces:

$$K_{sal} = 1 \quad (3.15)$$

Se comprenderá que este resultado es lógico si se recuerda algo que se dijo en el apartado 1.3.4: cuando un chorro penetra en el interior de un tanque su energía cinética se disipa completamente en forma de difusión turbulenta; si la pérdida es exactamente igual a la energía cinética, entonces su coeficiente K debe ser igual a la unidad.

Una *expansión gradual* es aquella en la que el ensanchamiento del tubo se produce suavemente, como se aprecia en la figura 3.3.b. El patrón de flujo no será igual que en la expansión brusca; inclusive puede llegar a evitarse el fenómeno de separación si el ángulo θ del cono que forma la expansión es lo bastante pequeño, como es el caso de la figura 3.1.d. La fórmula que evalúa el coeficiente K de una expansión gradual es parecida a la 3.13,

$$K_{ex. g} = C_a \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (3.16)$$

Tabla 3.1

Valores de $K_{ex. b}$. que surgen de la fórmula 3.14 para distintas relaciones de diámetros

D_1/D_2	$K_{ex. b}$	D_1/D_2	$K_{ex. b}$
	1	0,5	0,5625
0,05	0,995	0,55	0,4865
0,1	0,9801	0,6	0,4096
0,15	0,9555	0,65	0,3335
0,2	0,9216	0,7	0,2601
0,25	0,8789	0,75	0,1914
0,3	0,8281	0,8	0,1296
0,35	0,77	0,85	0,077
0,4	0,7056	0,9	0,0361
0,45	0,636	0,95	0,0095

sólo que ahora aparece un coeficiente C_o , el cual depende fundamentalmente del mencionado ángulo θ y se obtiene experimentalmente. En la figura 3.7 se grafican los valores del mismo en función de θ de acuerdo con las experiencias de Gibson. La tabla 3.2, que procede de una fuente diferente, presenta el coeficiente $K_{ex. g}$ en función de θ y de la relación de diámetros. como puede comprobarse, existe una pequeña discrepancia entre los valores que propone esta tabla y los que resultan de reemplazar los coeficientes C_o de la figura 3.7 en la fórmula 3.16. De acuerdo con la curva que se ve en la figura, el ángulo óptimo para una expansión gradual parece ser de 5 grados; en realidad lo que ocurre es que ángulos más pequeños hacen que la pérdida crezca un poco debido a la longitud de la expansión. Lo que sí puede afirmarse es que no se observan ventas en cuanto a disminución de la pérdida si el ángulo es mayor que 40 a 60 grados, de manera que desde el punto de vista hidráulico da lo mismo que la expansión sea brusca.

En el lenguaje técnico se le da el nombre de *difusor* a toda expansión en la que se recupera gradualmente la presión con pérdidas mínimas. Son difusores el tramo de salida del medidor Venturi (figuras 1.18 y 1.26), el tubo de desfogue de la mayoría de las turbinas hidráulicas (figura 1.4.b) y el tramo de descarga de la carcasa de las bombas centrífugas (figura 3.4).

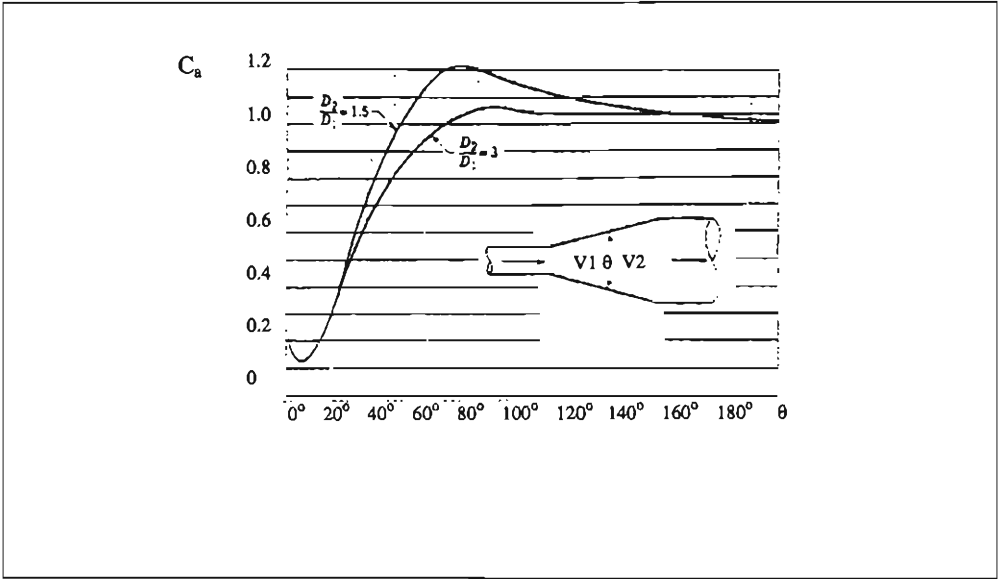


Figura 3.7: Coeficiente C_a para una expansión gradual (referencia [2]).

Tabla 3.2

Coeficientes K para una expansión gradual

$\frac{D_2}{D_1}$	2°	4°	6°	8°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°
1.1	.01	.01	.01	.02	.03	.05	.10	.13	.16	.18	.19	.20	.23
1.2	.02	.02	.02	.03	.04	.09	.16	.21	.25	.29	.31	.33	.37
1.4	.02	.03	.03	.04	.06	.12	.23	.30	.36	.41	.44	.47	.53
1.6	.03	.03	.04	.05	.07	.14	.26	.35	.42	.47	.51	.54	.61
1.8	.03	.04	.04	.05	.07	.15	.28	.37	.44	.50	.54	.58	.65
2.0	.03	.04	.04	.05	.07	.16	.29	.38	.46	.52	.56	.60	.68
2.5	.03	.04	.04	.05	.08	.16	.30	.39	.48	.54	.58	.62	.70
3.0	.03	.04	.04	.05	.08	.16	.31	.40	.48	.55	.59	.63	.71
α	.03	.05	.05	.06	.08	.16	.31	.40	.49	.56	.60	.64	.72

Fuente: Referencia [19]

3.4 Pérdidas en reducciones y entradas

Las *reducciones o contracciones* se emplean para reducir el diámetro de la tubería. Desde el punto de vista del montaje puede emplearse la misma pieza de fábrica para una reducción que para una expansión, pero el funcionamiento hidráulico difiere notablemente en un caso respecto del otro. El patrón de flujo en una reducción brusca de arista vivas y ángulos rectos es como el que se ve en la figura 3.2.b. Como puede observarse el flujo principal es convergente hasta una sección posterior a la reducción, en donde el área transversal es mínima y las líneas de corriente vuelven a hacerse paralelas; a ésta se le da el nombre de *sección contraída* o *vena contracta*. A partir de la misma las líneas de corriente se expanden hasta volver a ocupar la totalidad del tubo. A pesar de que antes del plano de la reducción existen zonas de flujo secundario, la parte esencial de la pérdida se produce a partir de la sección contraída, donde el flujo es divergente. Como puede apreciarse, entre ésta (indicada como A_c en la figura) y una sección posterior A_2 donde el movimiento vuelve a hacerse unidimensional, el patrón de flujo es similar al de una expansión brusca; de manera que podrá aplicarse la fórmula de Borda, cuya expresión en este caso será:

$$h_{rd. b} = \frac{(U_c - U_2)^2}{2g} \quad (3.17)$$

donde U_c y U_2 son las velocidades medias en las secciones A_c y A_2 respectivamente. Para obtener el coeficiente $K_{rd. b}$ debe tenerse en cuenta que:

$$h_{rd. b} = K_{rd. b} \frac{U_2^2}{2g} \quad (3.18)$$

En efecto, así como en la fórmula de las expansiones se emplea la velocidad del tramo de aguas arriba, en las reducciones se prefiere la de aguas abajo: en uno y otro caso se toma la mayor de ambas. Comparando la 3.17 con la 3.18 se obtiene:

$$K_{ex. b} = \left(\frac{U_c}{U_2} - 1 \right)^2$$

Aplicando la ecuación de continuidad $U_c A_c = U_2 A_2$ resulta:

$$K_{rd. b} = \left(\frac{A_2}{A_c} - 1 \right)^2 \quad (3.19)$$

Ahora bien, el problema que aquí se presenta es que no se conoce el valor del área A_c pero la misma se puede evaluar como el producto de un *coeficiente de contracción* C_c por el área del tubo:

$$A_c = C_c A_2 \quad (3.20)$$

Combinando esta ecuación con la 3.19, resulta:

$$K_{rd.b} = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \quad (3.21)$$

Aquí se terminan las posibilidades de tratar el problema en forma teórica ya que el coeficiente de contracción sólo puede obtenerse experimentalmente. Según puede demostrarse por aplicación del análisis dimensional, C_c es función del número de Reynolds y de la relación de diámetros. En la tabla 3.3 se dan los valores de este coeficiente obtenidos por Weisbach, del $K_{rd.b}$ resultante de combinar los mismos con la ecuación 3.21 y en una tercera columna se presentan otros valores de $K_{rd.b}$ hallados por Kisiliev.

Tabla 3.3
Coeficiente $K_{rd.b}$ para el cálculo de pérdidas por reducciones bruscas

A_2/A_1	C_c	$K_{rd.b}$	$K_{rd.b}$
	(Weisbach)	(calculado por la ec. 3.21)	(Kisiliev)
	Referencia [2]		Referencia [9]
0			0,5
0,1	0,624	0,3631	0,45
0,2	0,632	0,339	0,38
0,3	0,643	0,3083	0,34
0,4	0,659	0,2678	0,3
0,5	0,681	0,2194	0,24
0,6	0,712	0,1636	0,2
0,7	0,755	0,1053	0,15
0,8	0,813	0,0529	0,1
0,9	0,892	0,0147	0,05
1	1	0	0

Como puede apreciarse en esta tabla, el máximo valor del coeficiente K se obtiene para una relación de diámetros D_2/D_1 igual a cero; esto ocurrirá cuando el tramo de aguas arriba sea de dimensiones infinitas, es decir para una *entrada* o *embocadura*, que es el accesorio que se emplea para vincular un tanque o depósito con su tubo de drenaje; el valor correspondiente es:

$$K_{ent} = 0.5 \quad (3.22)$$

Este coeficiente es el que corresponde a una *entrada de aristas vivas* como la que se ve en la figura 3.8.a. Alternativamente una entrada puede ser de *aristas redondeadas* (figura 3.8.b) o con *tubo entrante* (figura 3.8.c). Estos cambios en el diseño del accesorio, que no influyen en la pérdida si se les emplea como salida, sí modifican apreciablemente el flujo si se les usa como entrada. En la misma figura se incluyen los coeficientes K respectivos que, como es lógico, son menores que 0.5 para la de aristas redondeadas y mayores para la de tubo entrante.

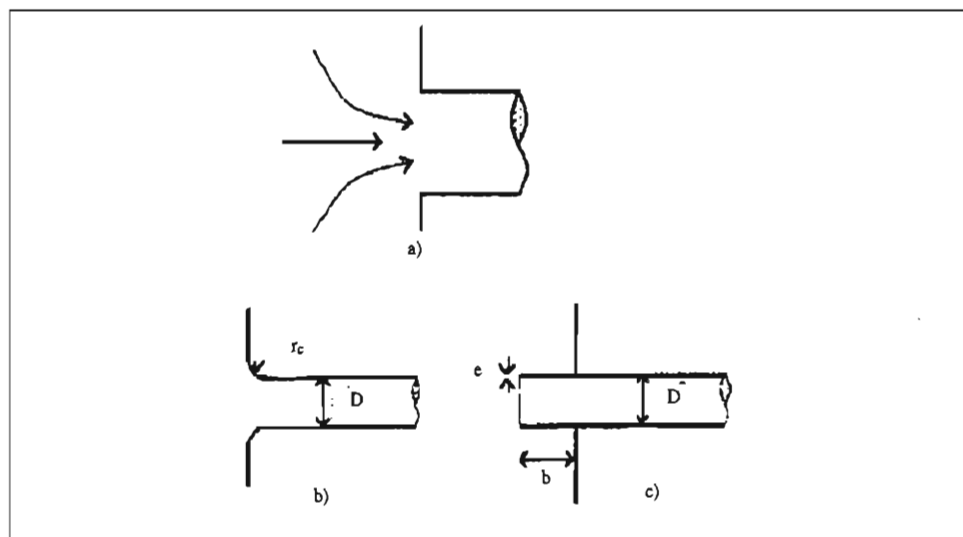


Figura 3.8: Entradas

a) Entrada de arista vivas $K_{ent} = 0.5$

b) Entrada de aristas redondeadas

r_c/D	0	0.02	0.04	0.08	0.12	0.16	> 0.2
K_{ent}	0.5	0.37	0.26	0.15	0.09	0.06	< 0.03

c) Tubo entrante

Valores de K_{ent} en función de b/D y e/D

b/D	0	0.002	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	> 0.5
e/D								
0	0.5	0.56	0.63	0.78	0.87	0.93	0.97	1
0.01	0.5	0.53	0.56	0.65	0.73	0.79	0.82	0.8
0.2	0.5	0.51	0.52	0.55	0.62	0.66	0.68	0.72
0.03	0.5	0.5	0.5	0.52	0.55	0.57	0.59	0.62
0.04	0.5	0.5	0.5	0.5	0.52	0.53	0.54	0.56

Fuente: Referencias [9] y [20]

Si se puede controlar la sección contraída podrá como consecuencia reducirse apreciablemente la pérdida. Esto es lo que ocurre en la entrada de aristas redondeadas y también en la llamada *reducción campana* (figura 3.9), en la cual la forma del contorno hace que el desprendimiento, en caso de existir, sea mínimo. Algo parecido ocurre en la *reducción gradual* (figura 3.10), cuyo coeficiente $K_{rd.g}$ es función de la relación de diámetros y del ángulo θ , como en la expansión similar.

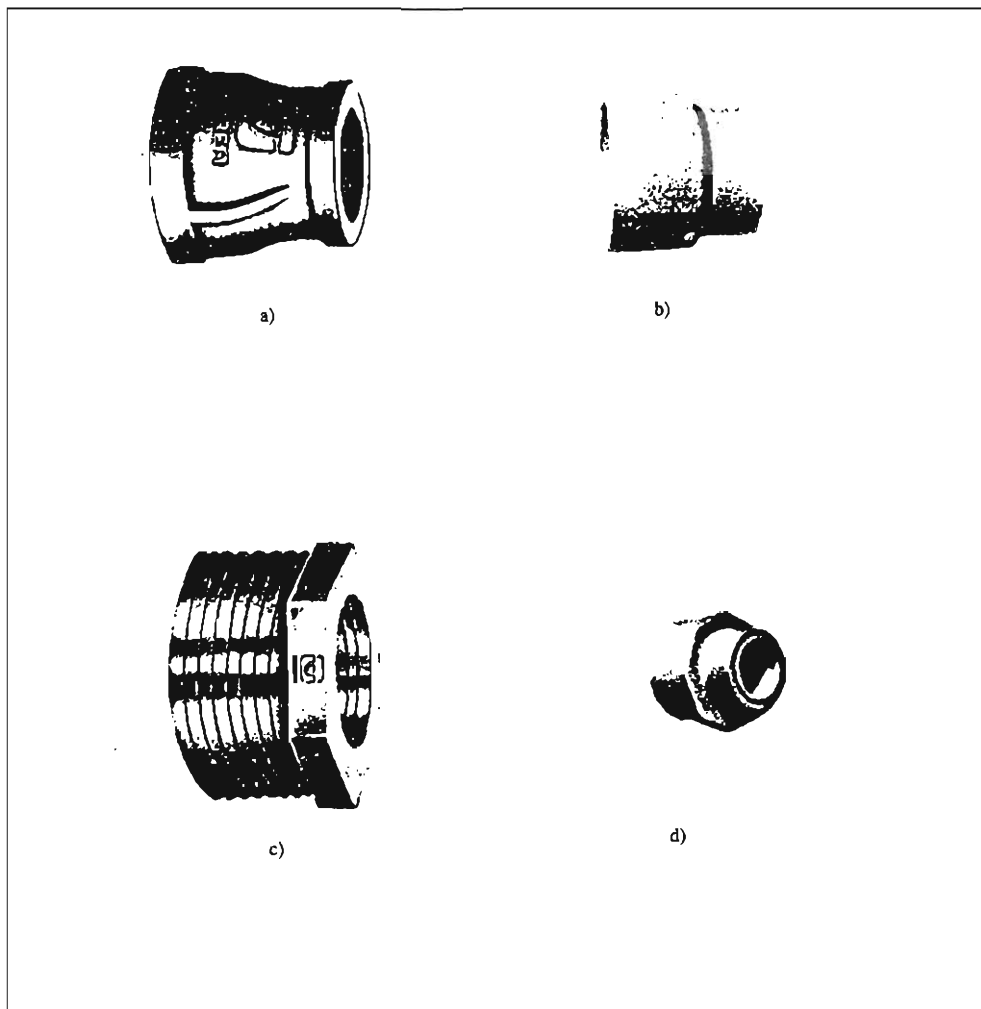
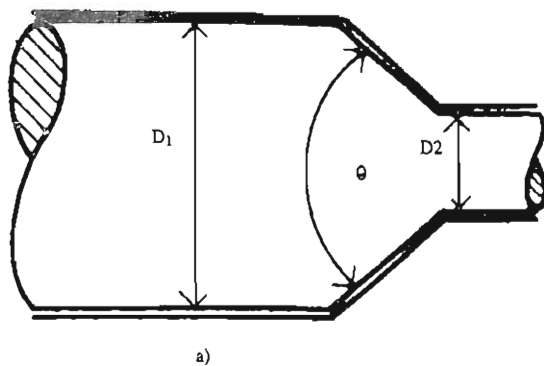


Figura 3.9: a) y b) Reducciones campana. c) y d) reducciones Bushing.



a)

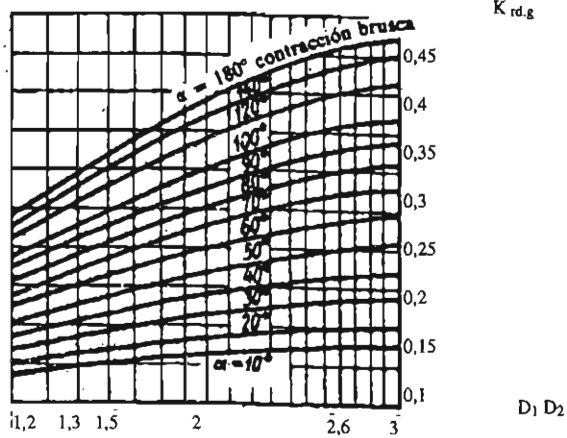


Figura 3.10: a) Reducción gradual. b) gráfica para obtener el coeficient K , Fuente: Referencia [20].

En el primer apartado de este capítulo se insistió en la importancia del flujo divergente como causa de las pérdidas secundarias. Una evidencia práctica de esto se puede ver en las tablas y gráficas presentadas, en las que se aprecia que la pérdida en una reducción es considerablemente menor que en una expansión que tenga el mismo diseño.

3.5 Pérdidas en codos y curvas

Los codos se emplean para provocar cambios bruscos de dirección en los conductos a presión. Sus formas, proporcionales y materiales de fabricación pueden ser muy diversos pero los parámetros más importantes son: la relación entre el radio de curvatura y el diámetro r/D y el ángulo de desvío de la corriente θ . El radio de curvatura se mide convencionalmente al eje del tubo. En la figura 3.11 se observan varios codos de fábrica, el primero es un codo a 45° , los dos que le siguen son a 90° , sin embargo la relación r/D del último es lo doble que la del anterior; en la segunda parte de la figura se ven dos codos de PVC a *ángulos vivos*, es decir que prácticamente no existe curvatura alguna. La parte h) de la figura corresponde a un retorno, es decir un codo (en este caso más bien es una curva) a 180° .

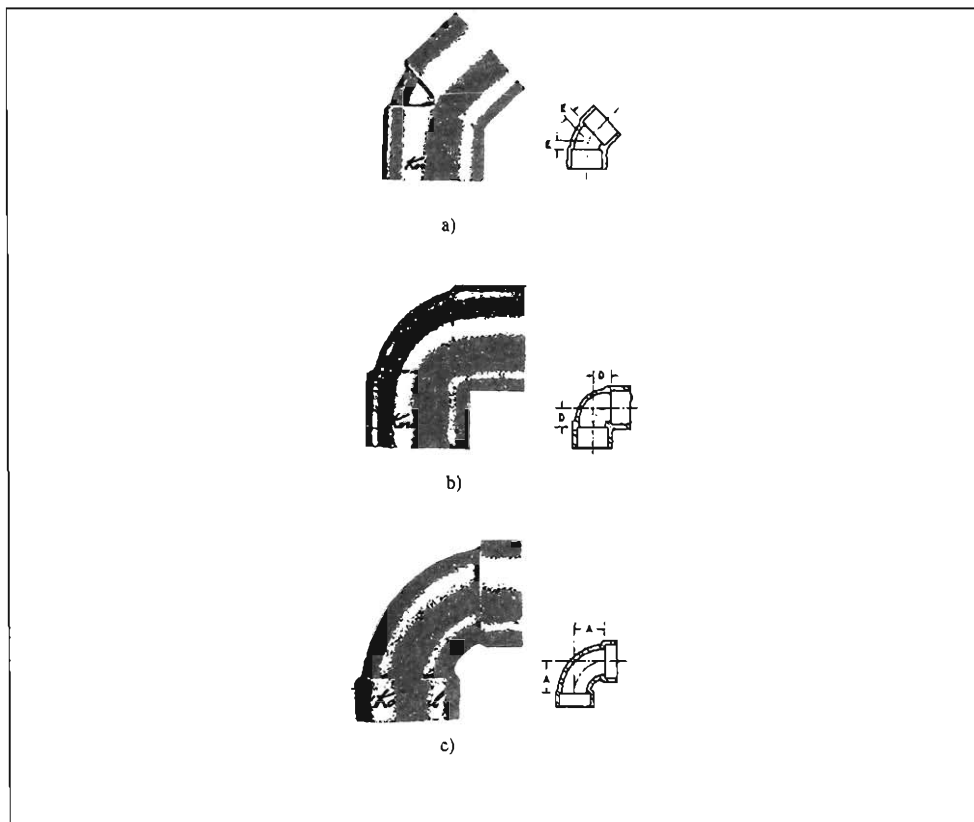


Figura 3.11: a) Codo a 45° de pequeño diámetro. b) codo a 90° . c) codo a 90° de curvatura amplia.

Las figuras 3.12 a 3.15 permiten obtener los coeficientes $K_{co.}$ de distintos tipos de codo. En la primera de estas figuras se introduce el concepto de codo regular (también llamado standard o normal) y codo de radio grande, vocablos usuales en la jerga técnica; según esta gráfica el coeficiente $K_{co.}$ depende también del diámetro y del tipo de junta. La figura 3.13 se refiere exclusivamente a codos a ángulos vivo. La 3.14 es válida para tubos lisos y turbulencia plena. La 3.15 contempla el caso de codos formados por gajos soldados.

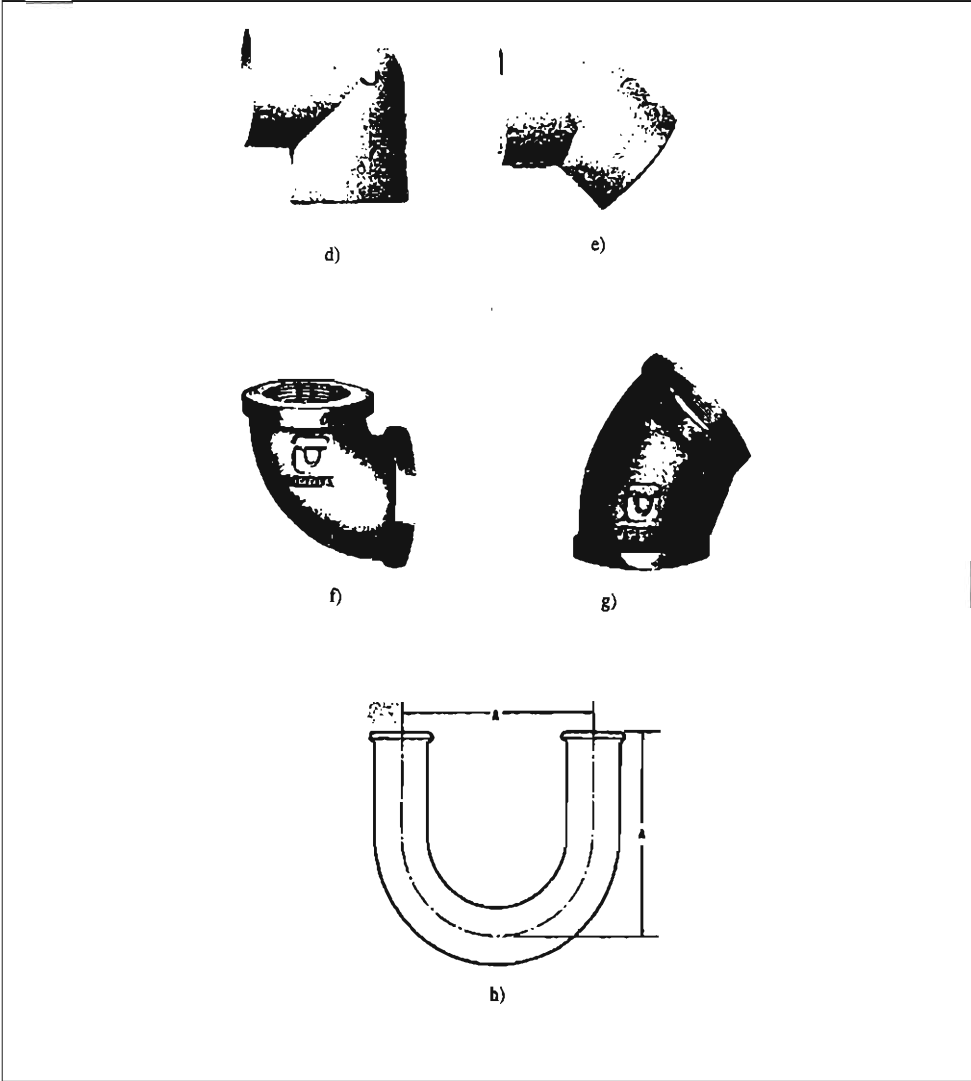


Figura 3.11 (Continuación): Codos de pequeño diámetro.

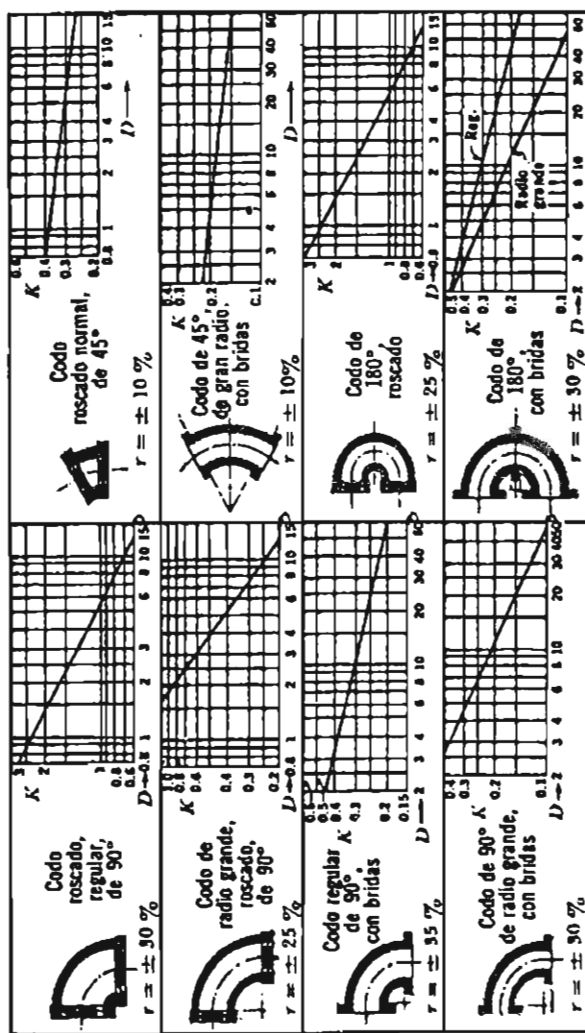


Figura 3.12: Coeficientes K para codos (D es el diámetro nominal) en cm (Referencia [9]).

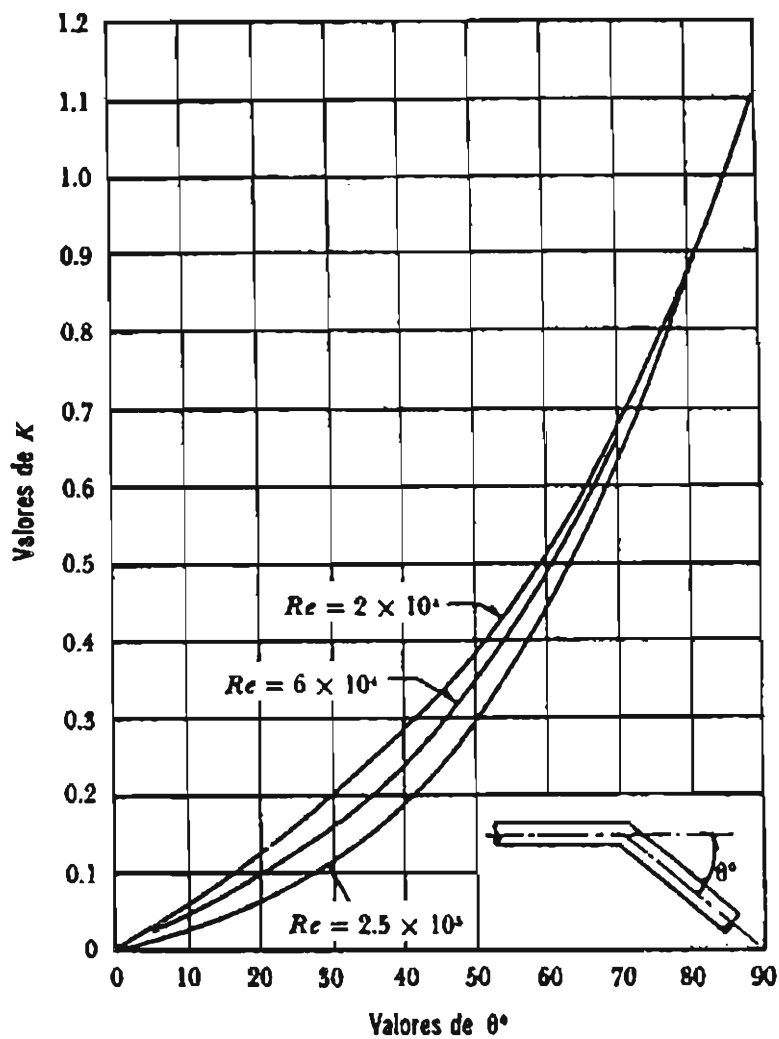


Figura 3.13: Coeficientes K para codos a ángulo vivo (Referencia [9]).

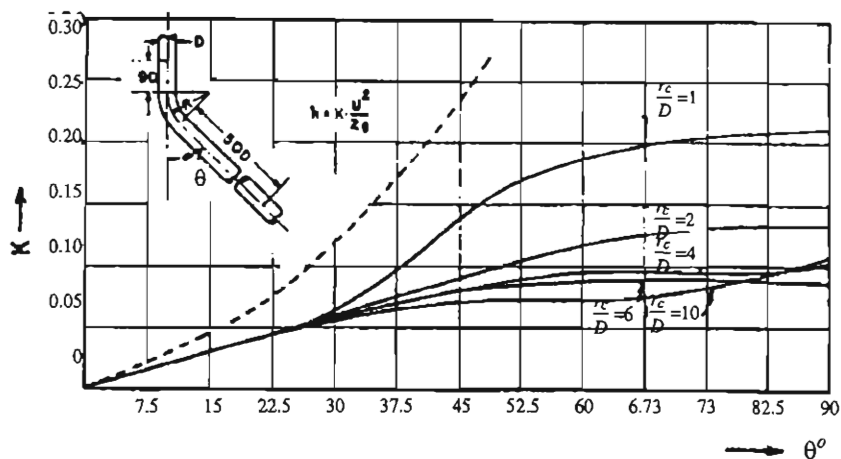
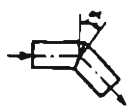
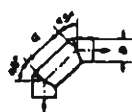



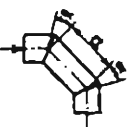
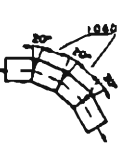
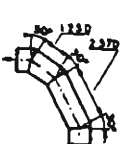
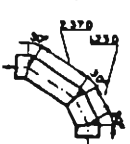




Figura 3.14: Coeficientes K para codos y curvas lisos y turbulencia plena (la línea punteada - - - - representa codo a ángulo vivo) (Referencia [30]).

	α	5°	10°	15°	22,5°	30°	45°	60°	90°	
	K_l	0,016	0,034	0,042	0,066	0,130	0,236	0,471	1,129	
	K_r	0,024	0,044	0,062	0,154	0,165	0,320	0,684	1,265	
	a/D (1)	0,71	0,943	1,174	1,42	1,86	2,56	3,14	4,89	(1)
	K_l	0,507	0,350	0,333	0,261	0,289	0,356	0,346	0,389	0,392
	K_r	0,510	0,415	0,384	0,377	0,390	0,429	0,426	0,455	0,444
	a/D	1,186	1,40	1,63	1,86	2,33	2,91	3,49	4,65	6,05
	K_l	0,120	0,125	0,124	0,117	0,096	0,108	0,130	0,148	0,142
	K_r	0,294	0,252	0,266	0,272	0,317	0,317	0,318	0,310	0,313
	a/D	1,23	1,44	1,67	1,91	2,37	2,96	4,11	4,70	6,10
	K_l	0,195	0,196	0,150	0,154	0,167	0,172	0,190	0,192	0,201
	K_r	0,347	0,320	0,300	0,312	0,337	0,342	0,354	0,360	0,360
	a/D	1,23	1,67	2,37	3,77					
	K_l	0,157	0,156	0,143	0,160					
	K_r	0,300	0,378	0,264	0,242					
	α	22,5°	30°	30°						
	a/D	1,17	1,23	2,37						
	K_l	0,112	0,150	0,143						
	K_r	0,284	0,268	0,227						
	K_l	0,108								
	K_r	0,236								
	K_l	0,188								
	K_r	0,320								
	K_l	0,202								
	K_r	0,323								
	K_l	0,400								
	K_r	0,534								
	K_l	0,400								
	K_r	0,601								

K_l : coeficiente para superficie lisa

K_r : coeficiente para superficie rugosa

Figura 3.15: Coeficientes K para codos y curvas compuestos (Referencia [30]).

Las *curvas* difieren de los *codos* en que poseen un desarrollo mayor; su radio de curvatura es muy grande comparado con el diámetro del tubo. En realidad en el caso de este accesorio no puede hablarse de pérdida secundaria en un sentido estricto, ya que el coeficiente K_{cur} que surge de la figura 3.16 tiene en cuenta también el efecto de fricción, que es importante debido a que se trata de un segmento de tubo de longitud considerable. Nekrasov [27] propuso una fórmula para el cálculo de curvas en tubos lisos y turbulencia plena para ángulos de 0 a 180° y r/D de 1 a 25.

$$K_{cur} = A(\theta) (0.051 + 0.19 D/r_D)$$

donde $A(\theta)$ vale $\text{sen } \theta$ para $\theta \approx 90^\circ$
 $0.9 \text{ sen } \theta$ para $\theta \leq 70^\circ$ y
 $0.7 + 0.35 \theta/90$ para $\theta \geq 100^\circ$

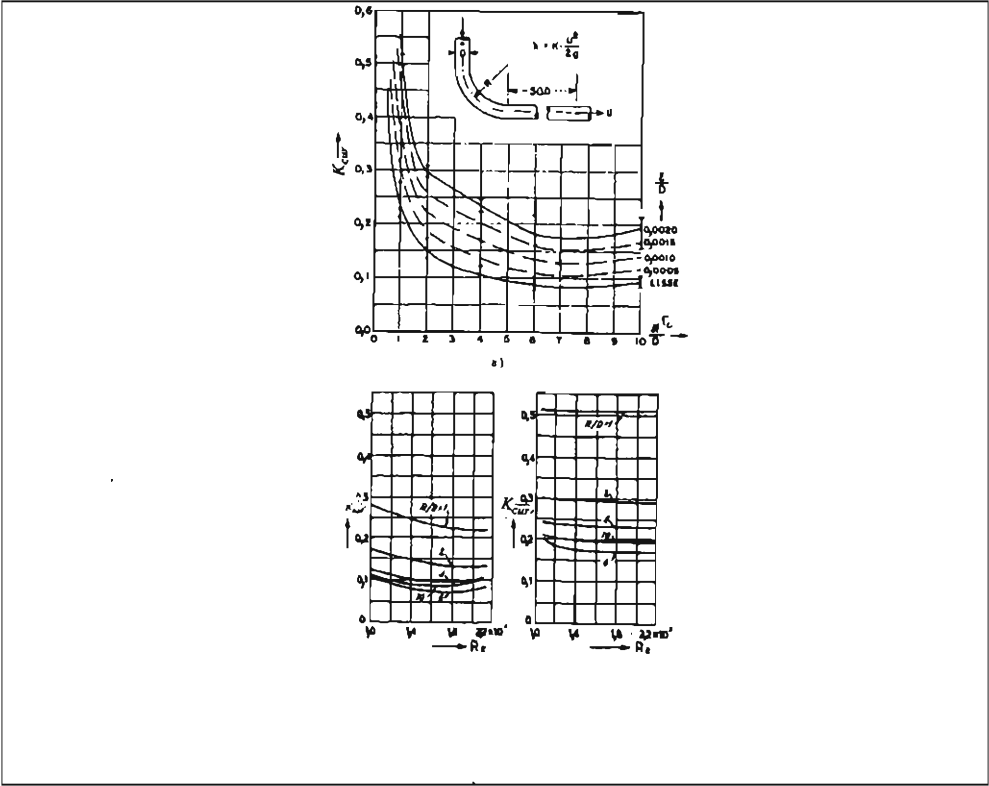


Figura 3.16: Coeficiente K para curvas (Referencia [30])

- a) para Re mayor que 220,000
- b) para Re entre 100,000 y 220,000

En todos los casos el ángulo es de 90° diferentes es $K_{cur}(\theta) = \frac{\theta}{90}$

3.6 Pérdidas en uniones y bifurcaciones

Las uniones y bifurcaciones son los accesorios empleados para vincular tres tramos de tubo. En el caso de las uniones (figura 3.17), dos corrientes convergen para unirse en una tercera, y en las bifurcaciones (figura 3.18), un tubo divide su gasto en otros dos.

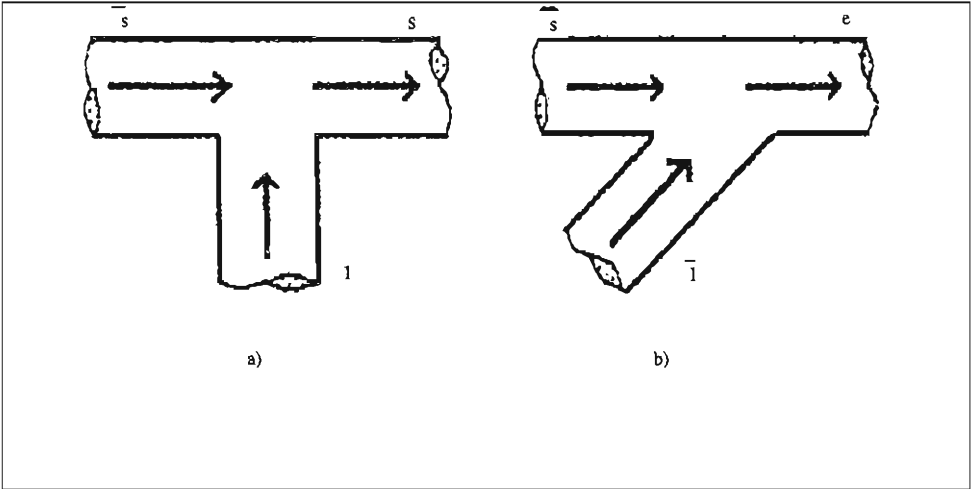


Figura 3.17: Uniones.

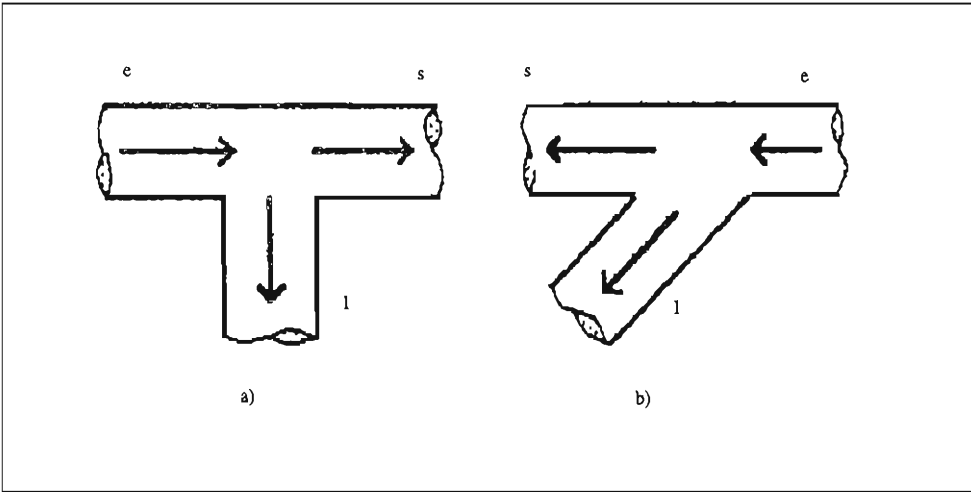


Figura 3.18: Bifurcaciones.

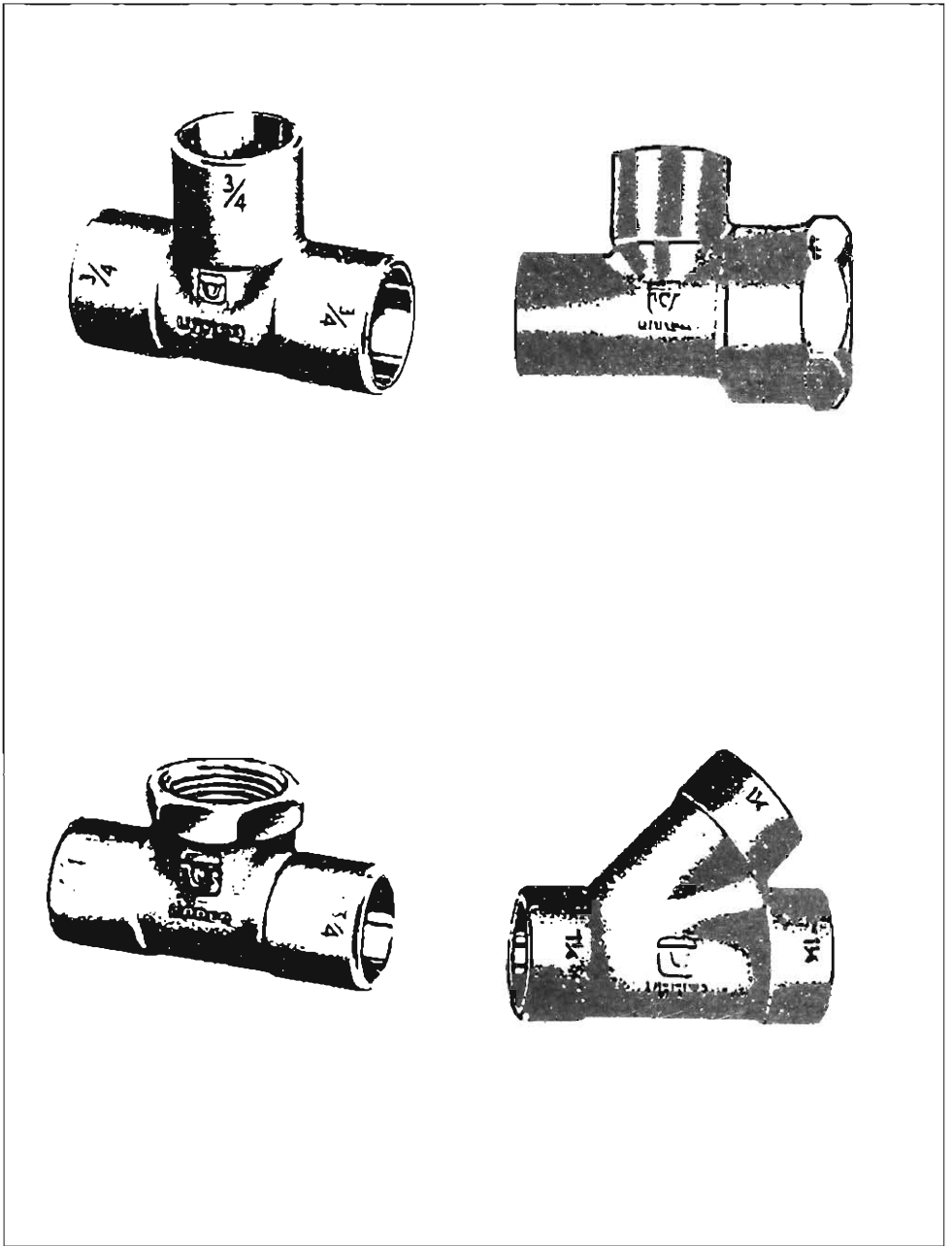


Figura 3.19: Accesorios T y Y para diámetros pequeños.

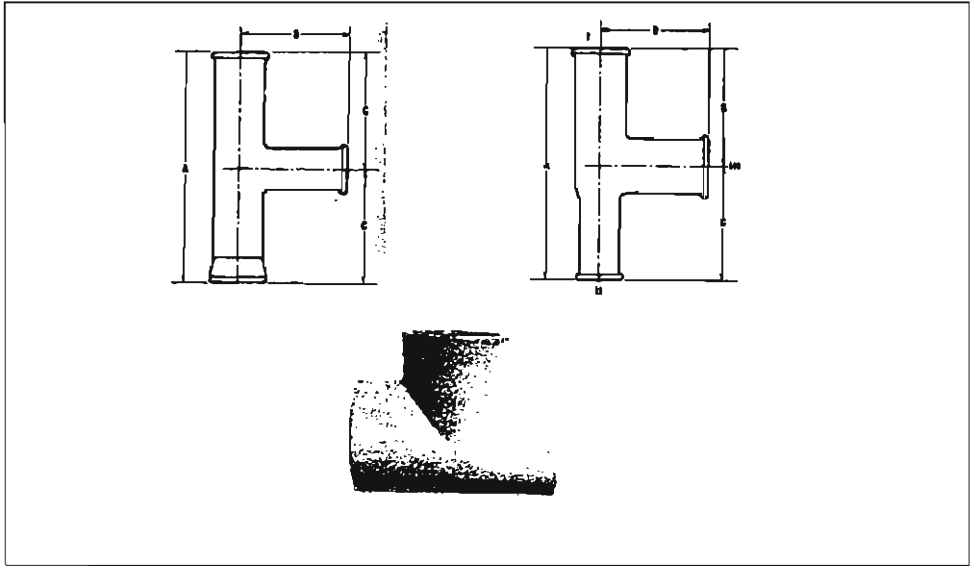


Figura 3.20: Accesorios T de PVC.

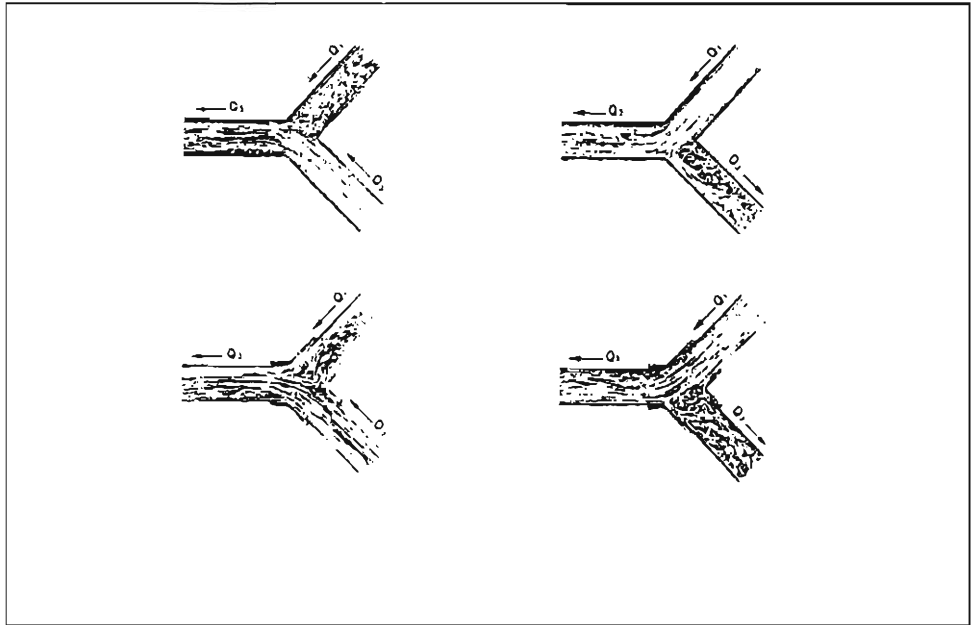


Figura 3.21: Bifurcaciones simétricas; se observa el patrón de flujo (Referencia [47]).

Las piezas de fábrica habitualmente empleadas para cumplir estas funciones son los *accesorios T* (figuras 3.17.a y 3.18.a) y los *accesorios Y* (figuras 3.17.b y 3.18.b); los segundos, por su diseño, permiten que la pérdida se reduzca si se les instala apropiadamente, ya que el desvío de la corriente resulta menor. También se emplean elementos soldados o de concreto colado, sobre todo en conducciones de gran diámetro.

El coeficiente de pérdidas K en uniones y bifurcaciones depende de varios parámetros: Por un lado está la *relación de diámetros*; otro parámetro es el *ángulo de desvío*, que es de 90° en las *T* y de 45° en las *Y*. El diseño particular del accesorio también influye, en particular si el partididor tiene cantos agudos o redondeados; en conducciones de gran importancia, como en instalaciones hidroeléctricas, por ejemplo, se emplean cantos redondeados para reducir la pérdida y lograr un flujo estable; en accesorios de fábrica empleados para diámetros menores, en cambio, normalmente los cantos son agudos. Finalmente otro parámetro a considerar, y muy importante, es la *relación de gastos*, que es un rasgo particular de este tipo de piezas y que da lugar a que un mismo accesorio tenga diferentes coeficientes K según la forma en que esté operando.

Otro aspecto que debe considerarse en este caso es que no es una sino que son dos las pérdidas a evaluar: Poniendo por ejemplo el de la figura 3.17, es distinta la pérdida h_{e-s} , y h_{e-l} . Otra posibilidad es la que se ilustra en la figura 3.22, en la cual la corriente total corresponde al tramo lateral; en tal caso las pérdidas podrán simbolizarse h_{p-l} y h_{s-l} si se trata de una unión y h_{l-p} y h_{l-s} para la bifurcación (los subíndices p y s se emplearán respectivamente para la corriente principal y la secundaria de los tramos alineados). Para cada pérdida habrá un coeficiente y al igual que ocurrió anteriormente con las expansiones y reducciones, es preciso acordar qué velocidad media se empleará en la fórmula $h_a = K \frac{V^2}{2g}$; con respecto a esto, normalmente se usa la *velocidad de la corriente total*, o sea la del tramo de aguas abajo en el caso de uniones y la del tramo de aguas arriba en las bifurcaciones.

Dado que los gastos son frecuentemente la incógnita del problema, no se podrá evaluar la pérdida del accesorio con precisión en la medida que aquéllos se desconozcan; un cálculo preciso obliga en estos casos a un proceso iterativo en el que primero se evalúa el coeficiente K en forma aproximada, se calculan los gastos y recién entonces se obtiene dicho coeficiente en función de éstos. Si no se requiere tal refinamiento o bien para hacer la primera estimación de las pérdidas se pueden extraer los valores de K de la figura 3.23 o de la 3.24 en las que se tiene en cuenta la dirección de la corriente pero no la magnitud de los gastos.

En caso de que sí se conozca la distribución de los gastos, los coeficientes K pueden obtenerse, en forma más precisa, de la tabla 3.4; sin embargo en este caso hay una limitación y es que los tres diámetros deben ser iguales. Más adelante se ilustra su aplicación en un problema resuelto.

3.7 Pérdidas en válvulas

Las *válvulas hidráulicas* son dispositivos que permiten controlar algún aspecto del flujo; por ejemplo: la magnitud del gasto, la dirección de la corriente o la presión. La mayoría de ellas produce una obstrucción en la conducción, suficiente para generar una pérdida secundaria considerable; en algunos casos dicha pérdida es precisamente lo que se trata de provocar con el fin de controlar el gasto o la presión. En lo que sigue se presentarán los tipos más importantes de válvula, se comentarán sus aplicaciones y, sobre todo, se describirá su comportamiento hidráulico y se verá el modo de cuantificar sus pérdidas.

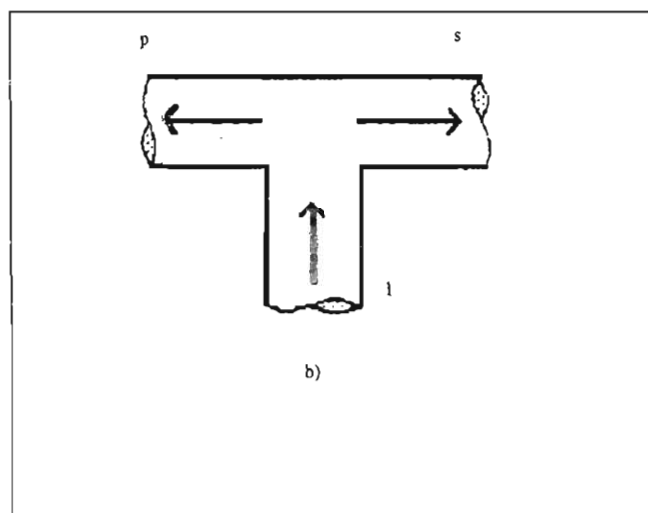
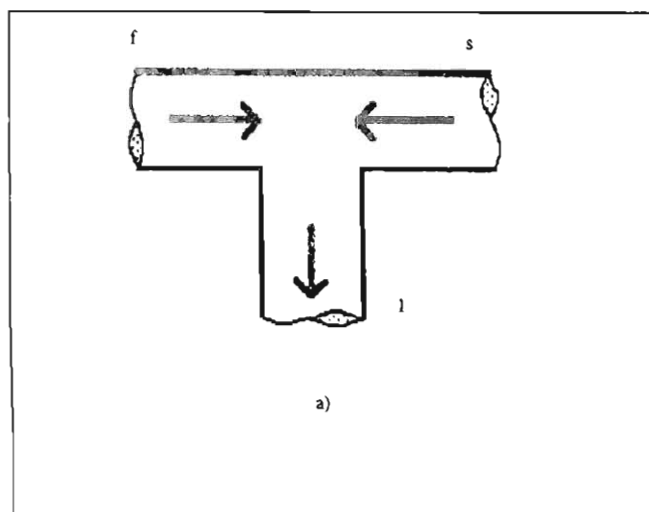


Figura 3.22: Accesorio T en el que la corriente total corresponde al tramo lateral; a) unión b) bifurcación.

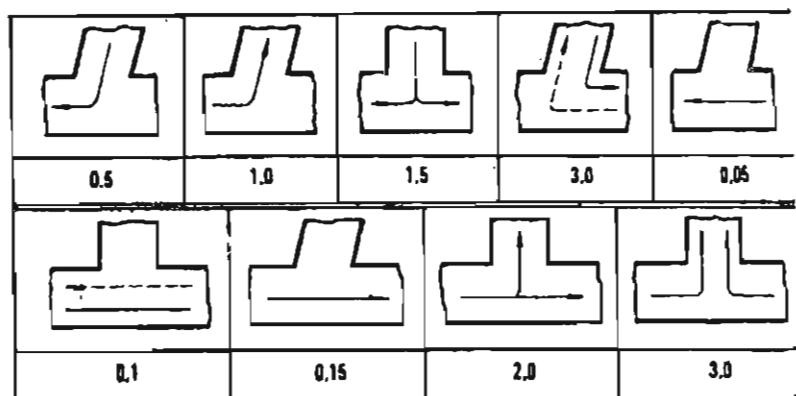


Figura 3.23: Coeficientes K para uniones y bifurcaciones (Referencia [20]).

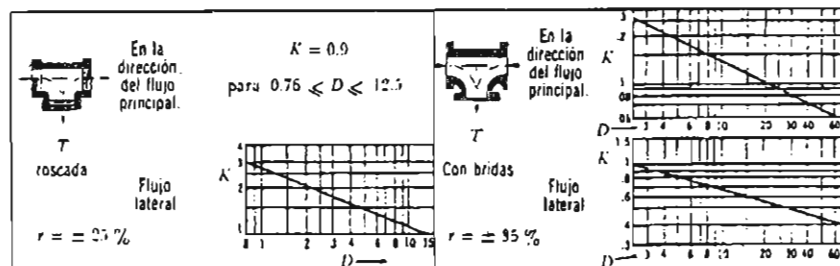


Figura 3.24: Coeficientes K para uniones y bifurcaciones de pequeño diámetro (D es el diámetro nominal en cm) (Referencia [9]).

Tabla 3.4

Cálculo de pérdidas en uniones y bifurcaciones considerando la distribución de gastos para diámetros iguales en las tres ramas

Para uniones (figura 3.17) deberá emplearse la fórmula

$$K = A + B \left(Q_l / Q_s \right) + C \left(Q_l / Q_s \right)^2$$

donde los coeficientes A, B y C se obtienen de la siguiente tabla

	Tipo de accesorio	A	B	C
K_{e-s}	Y	0.0353574	1.03768	-1.62053
	T	0.037143	0.723572	-0.160714
K_{l-s}	Y	-0.908214	2.8816	-1.6116
	T	-1.16107	3.79874	-1.75445

Para bifurcaciones (figura 3.18) se emplea la siguiente

$$K = A + B \left(Q_l / Q_e \right) + C \left(Q_l / Q_e \right)^2$$

y los coeficientes son los siguientes

	Tipo de accesorio	A	B	C
K_{e-s}	Y y T	0.121425	-0.243212	0.580355
K_{e-l}	Y	0.9175	-1.50768	1.04911
	T	0.945357	0.450179	0.790179

Fuente: Referencia [29]

3.7.1 Válvula de compuerta

La *válvula de compuerta* o *válvula esclusa* (figura 3.25), consiste en una placa o compuerta plana que, accionada por un volante o maneral con su vástago roscado, se desplaza en forma transversal al flujo, pudiendo de esta manera obstruir total o parcialmente la corriente. El aspecto que presenta externamente y que permite distinguirla de otros tipos de válvula, es el de un cajón en forma de U, con una unión (a bridas o a rosca) en un plano normal al vástago, para permitir su desensamble.

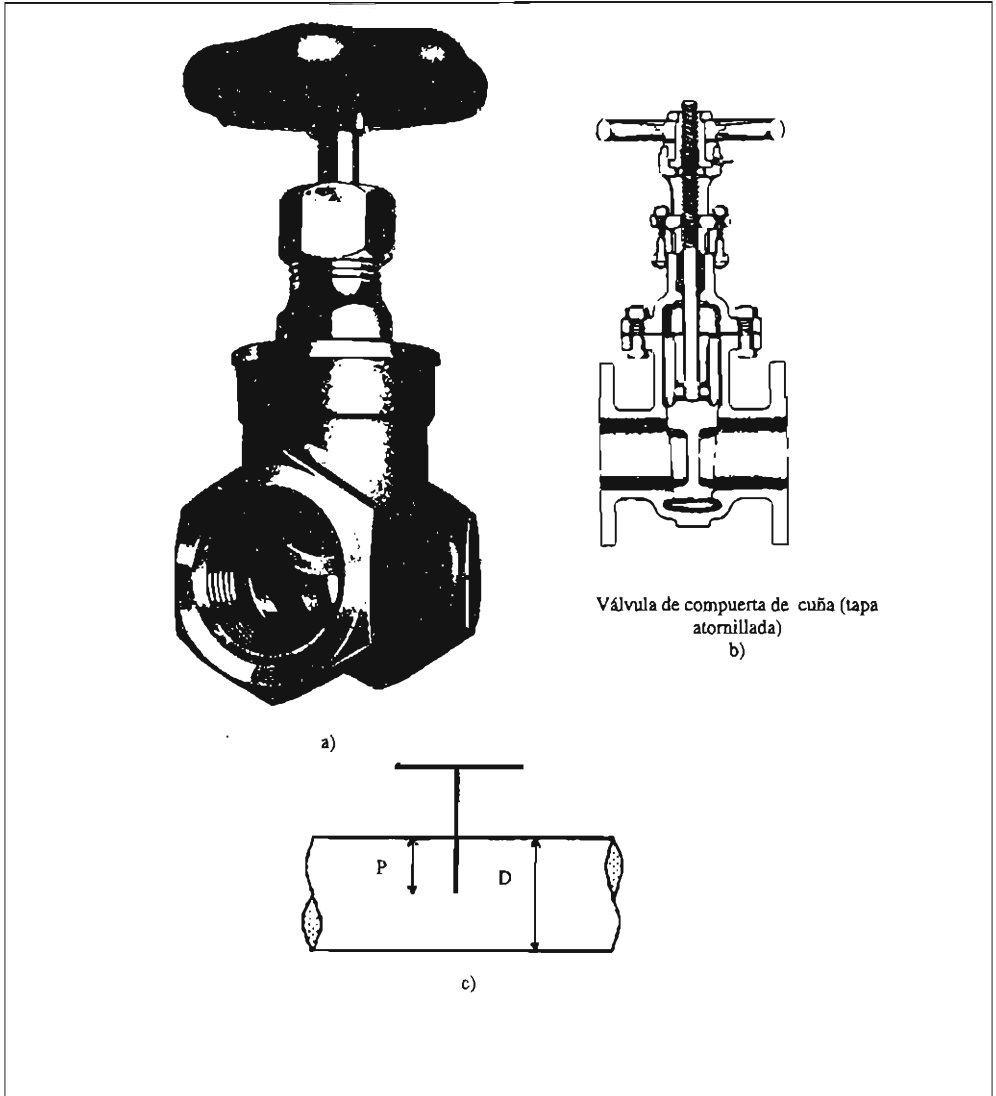


Figura 3.25: Válvula de compuerta.

Cuando la válvula está parcialmente cerrada provoca un flujo como el que se ve en la figura 3.2.d. El lector podrá darse cuenta que el *grado o relación* de cierre de la válvula incidirá de manera fundamental en la pérdida hidráulica que se genera. Una forma de cuantificar dicha relación es en función del número de vueltas, ya que es el recurso más fácil que tiene el usuario para medirla.

$$r.c. = \frac{N}{N_t} \quad (3.23)$$

donde N es el número de vueltas del volante desde la apertura total hasta el cierre parcial que se considera y N_t es el número de vueltas desde el apertura total hasta el cierre completo. En muchos libros y manuales se utiliza, en lugar de esta relación, la que resulta de dividir la penetración p de la placa y el diámetro D de la abertura (figura 3.25.c); sin embargo prácticamente ambos parámetros son iguales ya que dicha penetración es función lineal del número de vueltas N .

En la tabla 3.5 se muestran los valores que posee el coeficiente $K_{v.c.}$ en función de $r.c.$ y del diámetro del tubo. Una apreciación que puede hacerse es que el coeficiente es muy bajo cuando la válvula está totalmente abierta (normalmente $K_{v.c.a.}$ vale entre 0.03 y 0.14, como máximo 0.8 en algunos diseños para diámetros pequeños); si se observa la figura se comprenderá que esto es lógico pues la obstrucción al flujo es mínima cuando la apertura es total; esta es seguramente la principal ventaja que ofrece esta válvula. Sin embargo, por otro lado, en la misma tabla puede verse que la variación del coeficiente con la relación de cierre dista mucho de ser lineal; para un cierre del 70% el valor de K apenas llega a 10 o 15, pero a partir de esa relación su crecimiento es cada vez más fuerte; la consecuencia de esto desde el punto de vista práctico es que esta válvula no es adecuada para regular el gasto, ya que durante gran parte de su carrera de cierre la influencia sobre el flujo es muy poca. Esto constituye su principal desventaja. Como conclusión de lo dicho en este párrafo puede decirse que la válvula de compuerta es apropiada como dispositivo de iniciación e interrupción del flujo con la ventaja de provocar una pérdida muy baja estando totalmente abierta, pero no es conveniente a los fines de controlar el gasto.

3.7.2 Válvulas de globo, de codo y de aguja

La *válvula de globo* consiste en un vástago que remata en un empaque, el cual se apoya en un asiento circular cuando la válvula está completamente cerrada. El vástago está accionado por un volante y se desplaza en dirección transversal al tubo. En la figura 3.26 se puede ver un corte de esta válvula y, como puede apreciarse, el líquido debe realizar un recorrido bastante tortuoso aun para la condición de apertura total. Como consecuencia de esto, esta válvula genera una pérdida muy elevada aunque esté totalmente abierta y esto representa una desventaja considerable respecto de la válvula de compuerta. En la tabla 3.6 se muestran los coeficientes $K_{v.g.}$ de una válvula globo para distintas relaciones de cierre y diferentes diámetros y puede apreciarse que su coeficiente para apertura total es mucho mayor que el correspondiente a una válvula de compuerta. ¿Cuáles son entonces las ventajas de la válvula globo? Para empezar su mantenimiento es más sencillo y por otro lado es más adecuada que la de compuerta a los fines de regular el gasto.

En la figura 3.27 se ven algunos diseños alternativos de la *válvula de globo*, uno de ellos es la *válvula de codo*, en la que se aprovecha un cambio de dirección para la instalación de la misma, con lo cual el recorrido del líquido se hace más simple y se reduce el coeficiente K para la condición de apertura completa.

Tabla 3.5
Coeficientes K para válvula de compuerta

a) Coeficiente K en función del diámetro para la condición de apertura total					
Uniones roscadas					
Diámetro nominal (mm) $K_{v.c.a.}$	12.7 0.30	25.4 0.24	50 0.16	100 0.11	
Uniones a bridas					
Diámetro nominal (mm) $K_{v.c.a.}$	25.4 0.80	50 0.35	100 0.16	200 0.07	500 0.03
b) Relación entre el coeficiente K para el cierre parcial y la correspondiente a apertura total					
Relación de cierre $K/K_{v.c.a.}$	apertura total 1	25% 3 a 5	50% 12 a 22	75% 70 a 120	
c) Coeficiente K en función de relación de cierre para válvulas compuerta de diámetro mediano a grande					
Relación de cierre $K_{v.c.}$	33% 0.77	40% 1.55	50% 3.27	55% 4.57	58% 6.33
Relación de cierre $K_{v.c.}$	63% 8.63	67% 11.89	75% 22.68	79% 31.35	82% 41.21

Fuente: Referencias [1] y [28]

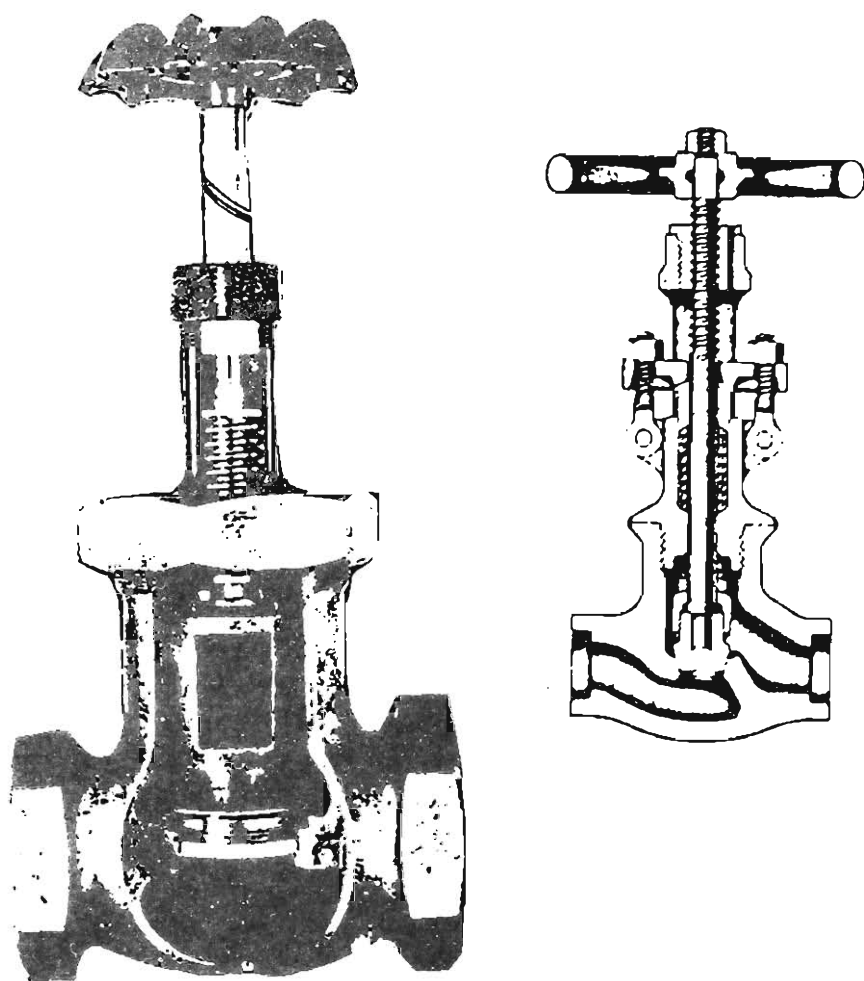
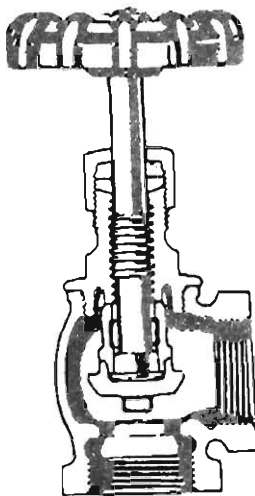
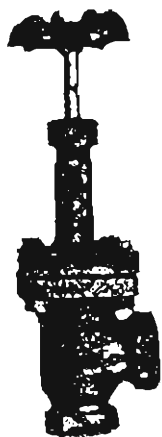
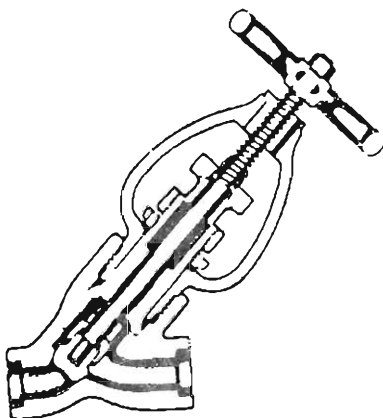
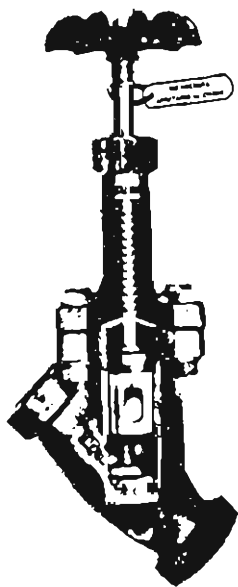


Figura 3.26: Válvula de globo.



a)



b)

Figura 3.27: a) válvula de codo. b) válvula en Y.

La *válvula de aguja*, que se aprecia en la figura 3.28.a, difiere de la de globo en que el remate del vástago es de forma cónica. De acuerdo a ensayos realizados esto permite que la regulación del gasto sea muy buena. Por tal motivo la válvula de aguja es adecuada cuando se requiere un control preciso del flujo en tubos de pequeño diámetro; esta última restricción se debe a que aún persiste el problema de la pérdida elevada para el caso de apertura total. En la tabla 3.7 se ven los coeficientes $K_{v.ag.}$ de una válvula de aguja para distintas relaciones de cierre; si se hace la comparación con la tabla 3.5 que corresponde a la de compuerta, se verá que efectivamente el coeficiente $K_{v.ag.}$ es más sensible al cierre progresivo de la válvula.

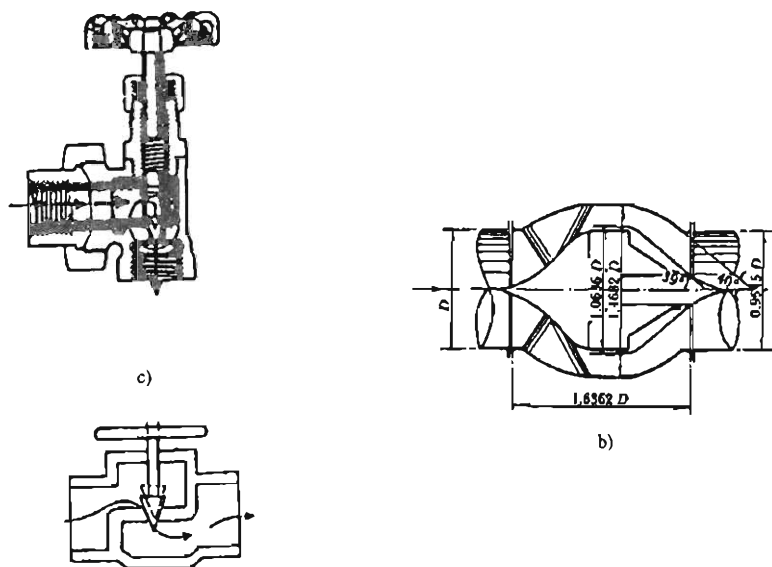


Figura 3.28: Válvulas de aguja. a) para tubos de pequeño diámetro. b) para tubos de gran diámetro con eje concéntrico.

Tabla 3.6

Coefficientes K para válvulas de globo

a) Coeficiente K en función del diámetro para la condición de apertura total					
Uniones roscadas					
Diámetro nominal (mm) $K_{v.g.a.}$	12.7 14	25.4 8.2	50 6.9	100 5.7	
Uniones a bridas					
Diámetro nominal (mm) $K_{v.g.a.}$	25.4 13	50 8.5	100 6.0	200 5.8	500 5.5
b) Relación entre el coeficiente K para el cierre parcial y la correspondiente a apertura total					
Relación de cierre $K/K_{v.g.a.}$	apertura total 1	25% 1.5 a 2	50% 2 a 3	75% 6 a 8	

Fuente: Referencia [1]

Tabla 3.7

Coefficiente K para válvula de aguja

Relación de cierre $K_{v.a.}$	apertura total 9		10 9.5	20 10	25 10.2	30 10.8	35 11	40 12.5	45 15
Relación de cierre $K_{v.a.}$	50 20	55 29	60 47	65 47	70 90	75 122	80 185	85 380	90 850

Fuente: Referencia [28]

En tubos de diámetros mayores se emplea este tipo de válvula pero su eje es concéntrico con el del tubo en lugar de ser transversal, lo cual requiere de un mecanismo de operación algo más complicado. En la figura 3.28.b se ve un modelo propuesto por el U.S.B.R. para ser instalada en una sección intermedia de la tubería; también los hay para sección extrema.

3.7.3 Válvulas de mariposa y esférica

La *válvula de mariposa* o *de lenteja* consiste en una placa circular plana que, accionada por su volante, gira alrededor de un eje transversal a la tubería (figura 3.29); cuando está abierta, la placa se dispone paralela a la corriente, oblicua cuando está parcialmente cerrada y normal cuando el cierre es completo. Al igual que la válvula de compuerta, cuando la apertura es total, la pérdida que genera es muy baja pero, a diferencia de ella, su ley de regulación del gasto es muy buena y esto constituye una ventaja adicional muy importante. Sin embargo tiene una desventaja muy ostensible y es que su carrera total desde la apertura máxima hasta el cierre completo es de apenas un cuarto de vuelta. A pesar de esto, si se trata de una conducción de diámetro mediano a grande, las dimensiones de la válvula serán importantes y es factible emplear un sistema de multiplicación de vueltas basado en engranes y ese cuarto de giro de la placa se puede transformar en varias vueltas en el volante; de esta manera se puede ejercer control sobre el gasto con mayor precisión y comodidad. También existen diseños de comando hidráulico, magnético o electrónico. Por otro lado, la válvula mariposa resulta apropiada para conducciones con velocidades y presiones elevadas, precisamente porque el flujo a través de ella es muy directo.

La *válvula esférica* o *válvula de bola* (figura 3.30), tiene principio de funcionamiento, ventajas y aplicaciones muy similares a la anterior, pero su diseño es diferente. Consiste en una esfera atravesada por una perforación en forma de tubo; cuando este tubo se coloca paralelo a la corriente prácticamente no ejerce obstrucción alguna sobre el flujo, por lo cual su pérdida es muy baja. También en este caso se trata de una válvula adecuada para el control del gasto; se le emplea con este fin en conducciones con altas velocidades y presiones. Sin embargo se le usa también en tubos de pequeño diámetro como *válvulas de paso rápido*.

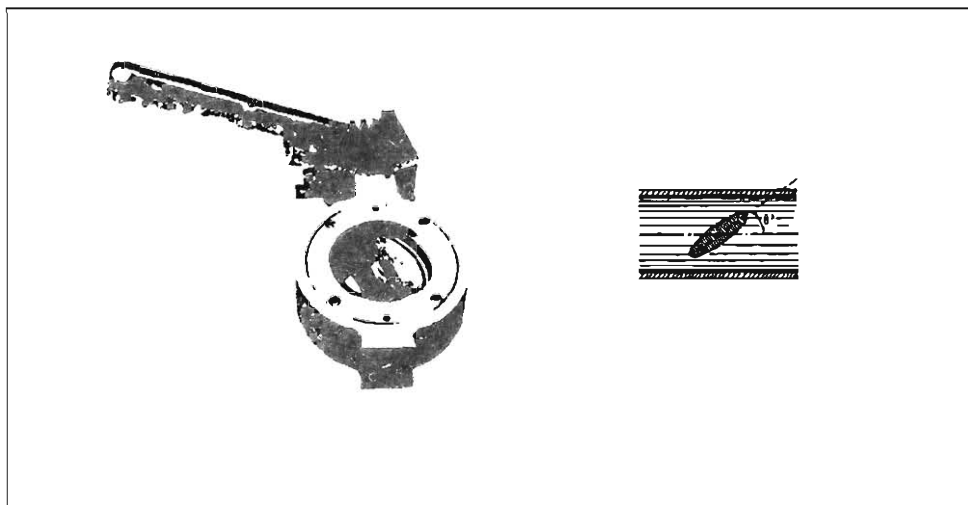


Figura 3.29: Válvula de mariposa o de lenteja.

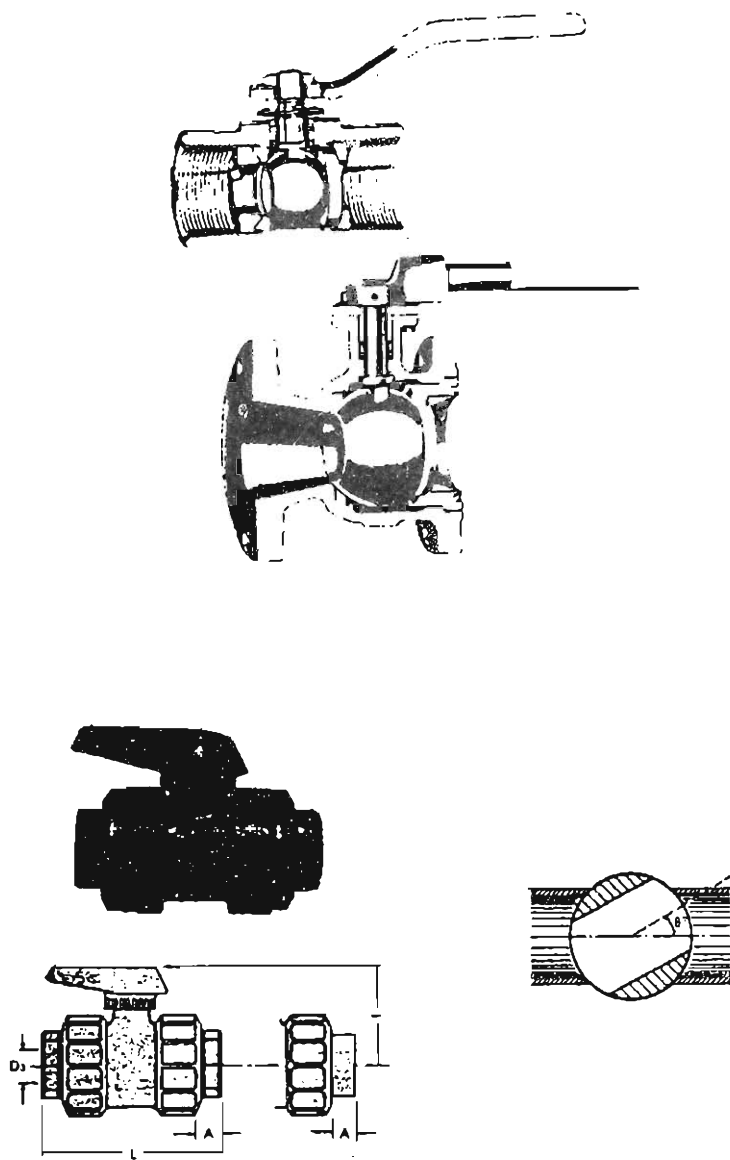


Figura 3.30: Válvula esférica o de bola.

En la tabla 3.8 se presentan los coeficientes $K_{v.m.}$ de una válvula de mariposa en función de la relación de cierre, y en la 3.9 los valores de $K_{v.es.}$ correspondientes a una válvula esférica. Cabe aquí el mismo comentario que se hizo al hablar de la válvula de aguja, en el sentido de que el coeficiente K es muy sensible a la relación de cierre.

Tabla 3.8
Coeficientes K para válvulas de mariposa
(Referirse a la figura 3.29.b)

θ°	Relación de cierre	$K_{v.m.}$
0	0	0.05
5	5.5%	0.24
10	11 %	0.52
15	16.7%	0.90
20	22 %	1.54
25	27.8%	2.51
30	33.3%	3.91
35	38.9%	6.22
40	44.4%	10.8
45	50 %	18.7
50	55.5%	32.6
55	61.1%	58.8
60	66.7%	118
65	72.2%	256
70	77.7%	751

Fuente: Referencia [9]

Tabla 3.9

Coeficientes K para válvulas esféricas
(Referirse a la figura 3.30.d)

θ°	Relación de cierre	$K_{v.m.}$
5	5.5%	0.05
10	11 %	0.29
15	16.7%	0.75
20	22 %	1.56
25	27.8%	3.10
30	33.3%	5.17
35	38.9%	9.68
40	44.4%	17.3
45	50 %	31.2
50	55.5%	52.6
55	61.1%	106
60	66.7%	206
65	72.2%	486
82	91.1%	

Fuente: Referencia [9]

3.7.4 Válvulas antirretorno

Las *válvulas antirretorno*, también llamadas *válvulas check* o de retención tienen por objeto permitir que el flujo pase en un sentido pero impedir que lo haga en el sentido opuesto. Esto es particularmente importante en instalaciones de bombeo, ya que una interrupción en la operación de la bomba puede ocasionar un retorno del líquido; el cierre automático de la válvula previene este accidente.

Existen básicamente dos mecanismos para este control automático: el *obturador oscilante* y el *obturador ascendente*. En el primer caso (figura 3.31.a) se trata de una placa capaz de girar alrededor de una articulación, mientras que en el segundo (figura 3.31.b) se trata de un elemento que se desplaza libremente, que se apoya en un asiento cuando la válvula se cierra y en otro opuesto a aquél cuando permite el paso del líquido. Como bien puede razonar el lector, la válvula de obturador oscilante es la que genera una pérdida menor.

La mencionada figura 3.31 ilustra una válvula del tipo de las que se colocan a media tubería. La figura 3.32, en cambio, muestra dos tipos de *válvula de pie*, que es un tipo especial de válvula antirretorno que se coloca en el extremo de succión de las instalaciones de bombeo, con el objeto de impedir que el líquido retorno al cárcamo y facilitar el cebado de la bomba. En la mayoría de los casos va acompañada de una reja o coladera (en México se le da el nombre de *pichancha*) para impedir el ingreso de sólidos.

En la tabla 3.10 se presentan los coeficientes $K_{v,ar}$ de las válvulas antirretorno presentadas.

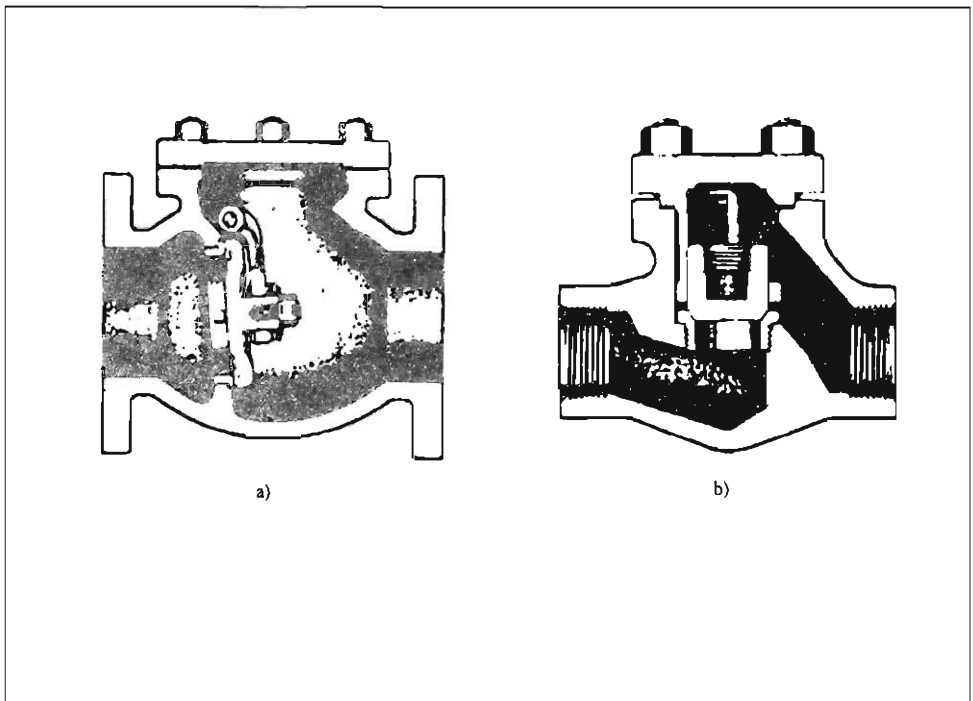


Figura 3.31: Válvulas antirretorno. a) de obturador oscilante. b) de obturador ascendente.

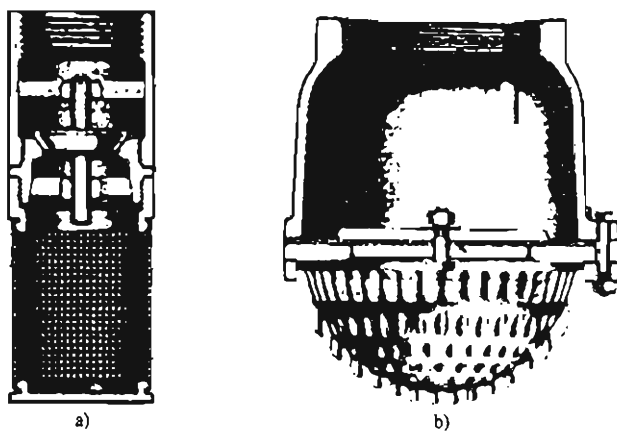


Figura 3.32: Válvulas de pie con coladera: a) de obturador ascendente. b) de obturador oscilante (Referencia [14]).

Tabla 3.10**Coeficientes K para válvulas antirretorno**

diámetro nominal (mm)	válvula tipo 1 (fig. 3.31.a)	válvula tipo 2 (fig. 3.31.b)	válvula tipo 3 (fig. 3.32.a)	válvula tipo 4 (fig. 3.32.b)
15	1.35	10.8	11.3	2
20	1.25	10	10.5	1.87
25	1.15	9.2	9.7	1.72
32	1.10	8.8	9.2	1.65
40	1.05	8.4	8.8	1.57
50	0.95	7.6	8	1.42
65, 80	0.9	7.2	7.6	1.35
100	0.85	6.8	7.1	1.27
125	0.8	6.4	6.7	1.2
150	0.75	6	6.3	1.12
200, 250	0.7	5.6	5.9	1.05
300, 400	0.65	5.2	5.5	0.98
450, 600	0.6	4.8	5.1	0.9

Válvula tipo 1: En línea de obturador oscilante

Válvula tipo 2: En línea de obturador ascendente

Válvula tipo 3: De pie con rejilla de obturador ascendente

Válvula tipo 4: De pie con rejilla de obturador oscilante

Fuente: Referencia [4]

3.7.5 Válvulas de aire, de alivio y reductora de presión

La *válvula de aire* (figura 3.33) tiene el objeto de permitir la salida y/o el ingreso de aire en puntos elevados de la tubería. La salida cuando se llena el tubo a fin de evitar que quede una masa de aire atrapada en la conducción y el ingreso cuando se quiere prevenir un colapso debido a un eventual vacío. La *válvula de alivio* (figura 3.34) tiene por objeto proteger a la tubería de la ocurrencia de sobrepresiones exageradas debidas a transitorios hidráulicos. Generalmente constan de un elemento elástico que se contrae cuando la presión crece peligrosamente permitiendo la salida de un cierto volumen de agua. A pesar de que son dispositivos diferentes, desde el punto de vista de la evaluación de las pérdidas la válvulas de aire y la de alivio tienen algo en común y es que prácticamente no perturban el flujo porque no lo interceptan, sino que se instalan en una derivación de la conducción. Por tal motivo puede aceptarse que no generan pérdida o a lo sumo se computarán como un accesorio T en el que no se desvíe gasto por el conducto lateral, como se esquematiza en el 6to. dibujo de la figura 3.33.

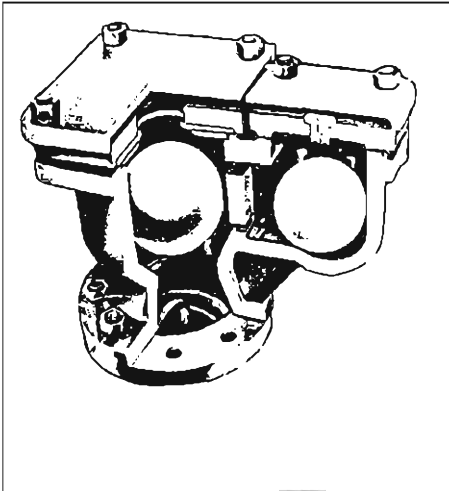


Figura 3.33: Válvula de aire o ruptora de vacío.

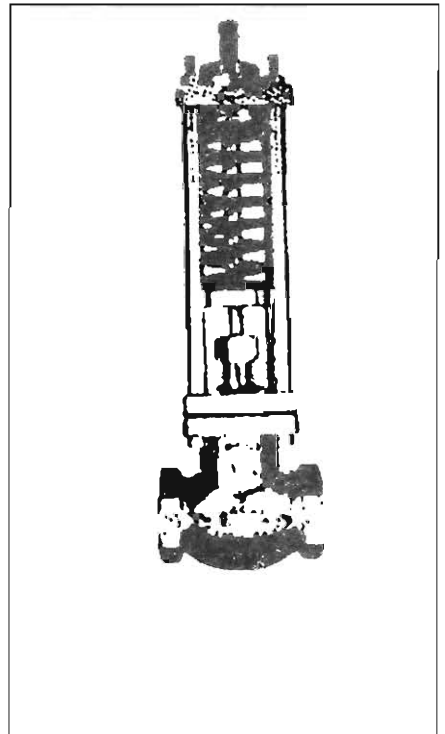


Figura 3.34: Válvula de alivio.

La *válvula reductora de presión* es un dispositivo cuya función es reducir la presión de la línea. Si bien por un lado es cierto que entre mayor sea la presión mayor será la capacidad de descarga de la tubería, también es un hecho que altas presiones requieren fuertes espesores de tubo a fin de poder resistir el esfuerzo, así como accesorios capaces de soportarlas y la tendencia a la fuga por las juntas y grietas será mayor. Por ello es que muchas veces es conveniente reducir la presión en la conducción. Un ejemplo podría ser el de una derivación lateral de un tubo troncal de abastecimiento en el cual la presión es muy alta por necesidades del proyecto (figura 3.35); probablemente en el tubo de derivación no se requieran presiones igualmente elevadas, entonces la colocación de una válvula reductora de presión en la posición señalada es útil para resolver el problema. A diferencia de las otras dos presentadas en este apartado, esta válvula sí genera una pérdida muy elevada, pero esto es precisamente el objetivo que se persigue; una pérdida fuerte se traduce en una fuerte reducción de la presión. Lo importante de estas válvulas es que la reducción de presión que generan sea poco sensible a los cambios de velocidad.

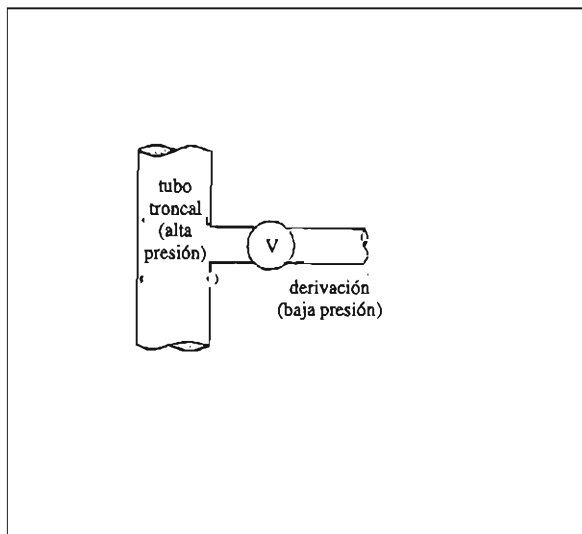


Figura 3.35: Instalación de una válvula reductora de presión.

En la figura 3.36 se presentan unas gráficas para obtener el coeficiente K de algunas de las válvulas presentadas, para el caso de diámetros pequeños.

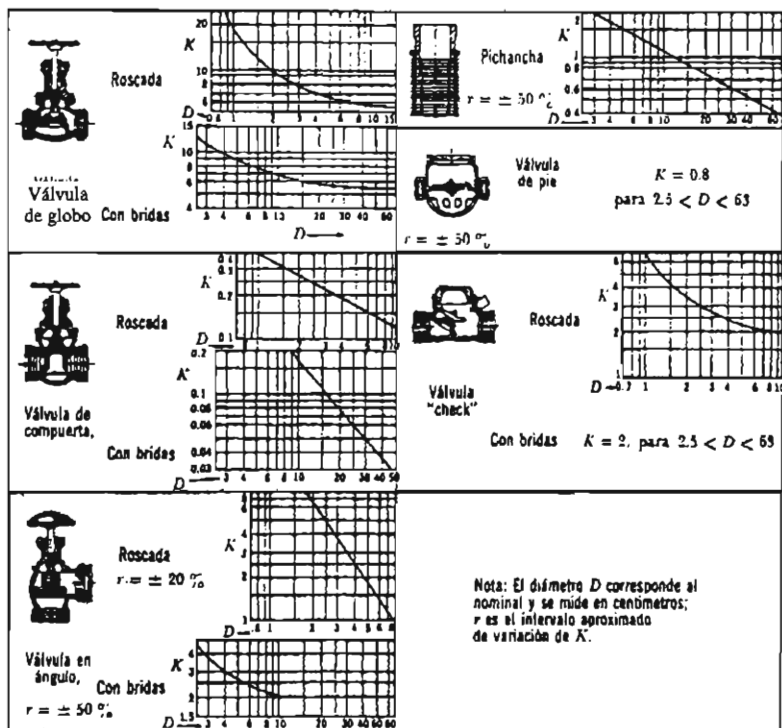


Figura 3.36: Coeficientes K para válvulas completamente abiertas en diámetros medianos y pequeños (Referencia [9]).

3.8 Pérdidas por medidores

Los dispositivos empleados en tubos a presión para medir alguna de las variables del flujo pueden provocar pérdidas secundarias. Los manómetros, que tienen por objeto la medición de la presión, no son el caso ya que se colocan en forma tangencial a la conducción. Los *medidores de gasto*, en cambio, sí provocan pérdidas y los *caudalímetros* o *medidores de gasto acumulado* llegan a generar pérdidas muy elevadas.

Un grupo importante de medidores de gasto lo constituyen los llamados *deprimógenos*, de los cuales ya se ha presentado el medidor Venturi o venturímetro (figuras 1.18 y 1.26). La característica de estos medidores es que provocan un estrechamiento en el flujo, con lo cual se genera una depresión Δp ($\Delta h = \Delta p / \gamma$); en realidad lo que se mide directamente es esta diferencia de presión y luego por aplicación de la ecuación de Bernoulli se calcula el gasto. Los otros dos ejemplos clásicos son la *boquilla* o *tobera* y la *placa orificio* o *diafragma* (figura 3.37). De ellos el que genera menor pérdida es el medidor Venturi por su diseño hidrodinámico; en particular por su difusor, el cual permite recuperar gradualmente la presión. La pérdida del venturímetro es básicamente la del difusor, de manera que puede aplicarse lo visto para el caso de expansiones graduales en el apartado 3.3; pero con la diferencia de que ahora convendrá usar la energía cinética del tubo y no la de la garganta en la fórmula de pérdidas

$$h_{vent.} = K_{vent.} \frac{U_1^2}{2g}$$

por lo tanto la fórmula 3.16 de expansiones graduales, cambia en este caso a la siguiente:

$$K_{vent.} = C_a \left[\frac{A_1}{A_2} - 1 \right]^2 \quad (3.24)$$

donde A_1 es el área del tubo, A_2 la de la garganta y el coeficiente C_a puede extraerse de la figura 3.7

La pérdida en una tobera es algo mayor debido a que en este dispositivo se produce claramente el desprendimiento. Su patrón de flujo guarda bastante similitud con el de la expansión brusca de la figura 3.6; de manera que puede aplicarse la fórmula de Borda, cuya expresión en este caso será:

$$h_{lob.} = \frac{(U_2 - U_1)^2}{2g}$$

donde U_1 es la velocidad en el tubo y U_2 en la boquilla. El coeficiente K que se deduce de esta ecuación resulta:

$$K_{lob.} = \left[\frac{A_1}{A_2} - 1 \right]^2 \quad (3.25)$$

Finalmente una placa orificio difiere de la boquilla en que la contracción se produce por separación del flujo y no por el redondeo del contorno como en aquella. Por esta razón su pérdida es aún mayor:



199

$$K_{p.o.} = \left[\frac{A_1}{C_c A_2} - 1 \right]^2 \quad (3.26)$$

donde C_c es el coeficiente de contracción, el cual vale aproximadamente 0.6.

Tanto en la tobera como en la placa orificio se emplea la energía cinética del tubo en la fórmula de pérdidas al igual que en el medidor Venturi.

Otros ejemplos de medidores de gasto que provocan pérdidas son: el *rotámetro* y el *aforador de codo* (figura 3.38); mientras que hay otros diseñados para no producir pérdidas o bien ésta es muy baja, como el *medidor magnético* o el *annubar* (figura 3.39), este último es una variante del tubo de Pitot.

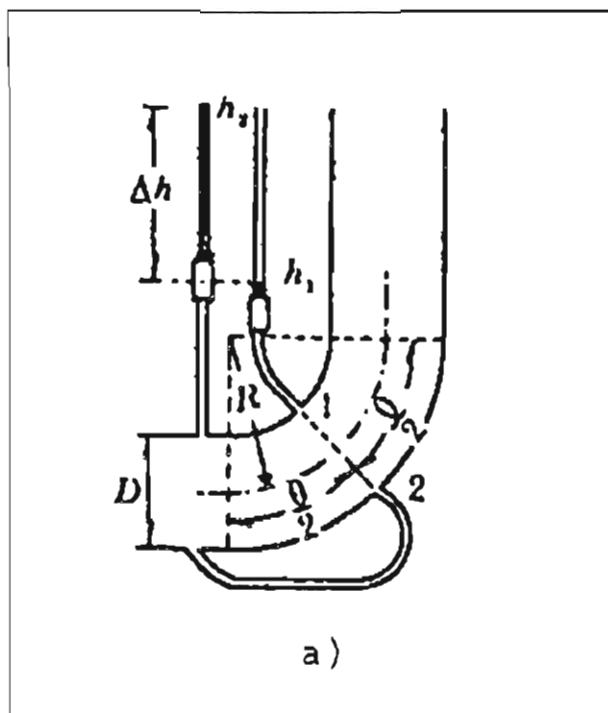


Figura 3.38: Medidores que provocan pérdida. a) aforador de codo (Referencia [9]). b) rotámetro (Referencia [34]).

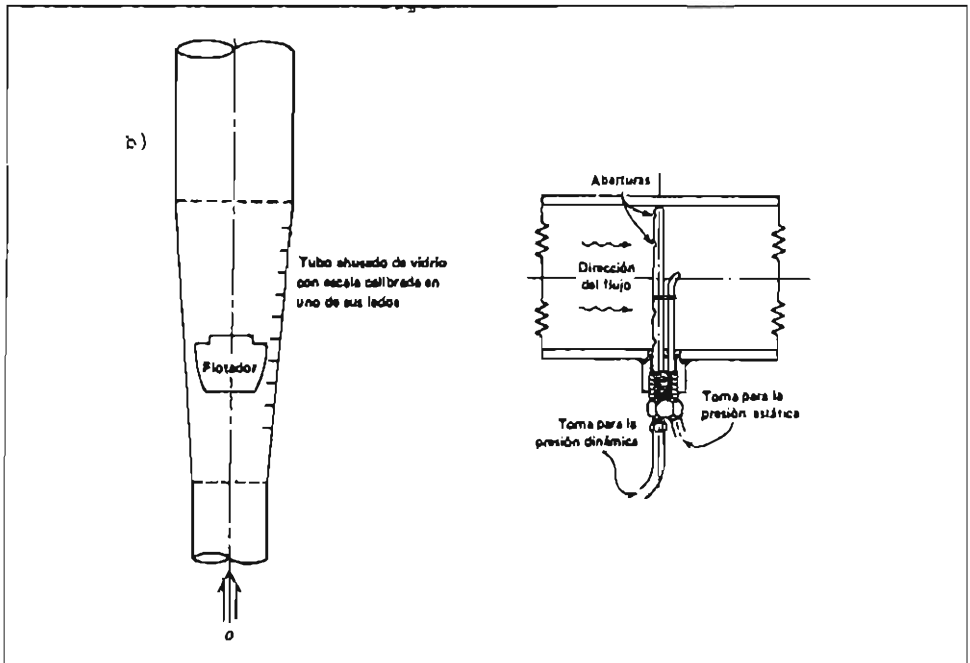


Figura 3.39: Annubar.

Los dispositivos conocidos habitualmente como medidores, también llamados caudalímetros, se diferencian de los anteriores en que miden gastos acumulados, es decir volúmenes que pasan por una cierta sección de tubería en un periodo de tiempo; son los que se emplean para conocer el consumo de líquido. Los medidores de uso doméstico e industrial que se usan actualmente son en general de dos tipos: de *tipo gasto* y de *tipo velocidad*; estas denominaciones hacen referencia a su principio de funcionamiento. Los primeros son *medidores de desplazamiento positivo*; esto significa que basan su funcionamiento en el desplazamiento cuasiestático de una cierta cantidad de líquido dentro de cámaras cerradas; conforme pasa el líquido se impulsan unos elementos giratorios, los cuales a su vez mueven un sistema de engranes, que permiten llevar la lectura del gasto consumido a un cuadrante. Por supuesto que todo se hace a expensas de la energía de la corriente líquida, por esto es que los medidores figuran entre los accesorios que provocan pérdidas más elevadas. Para evaluar la pérdida en un *medidor de disco nutante* (figura 3.40), que es uno de los más empleados, puede usarse la siguiente fórmula empírica [33]

$$K_{med.} = 100 D^{3/2} \quad (3.27)$$

donde D es el diámetro del tubo en metros.

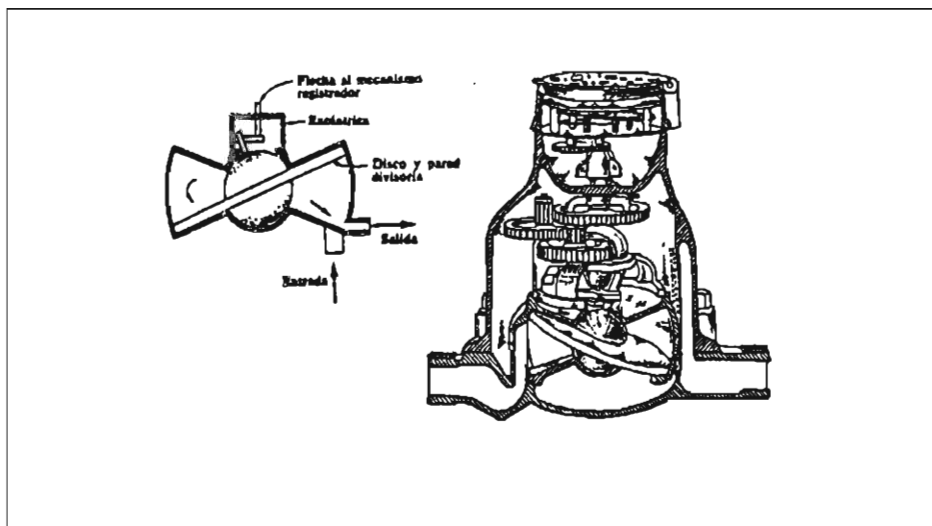


Figura 3.40: Medidor de disco nutante.

Los medidores tipo velocidad son los que basan su funcionamiento en el empuje dinámico del líquido sobre un rotor, como es el caso de los *medidores tipo turbina* (figura 3.41) de chorro simple o múltiple.

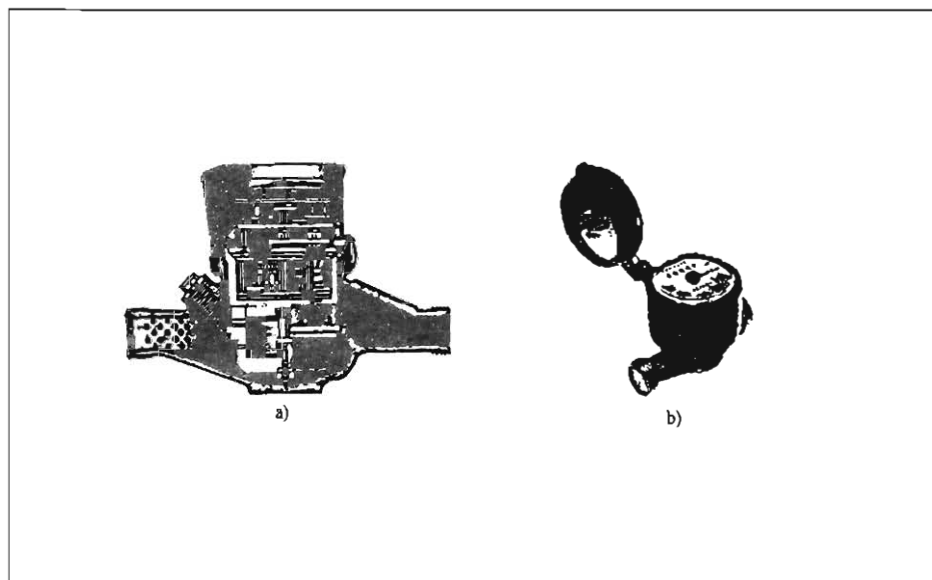


Figura 3.41: Medidores tipo turbina. a) de chorro múltiple y transmisión mecánica. b) de chorro único transmisión magnética.

Una alternativa para estos dos tipos de medidores que permiten reducir la pérdida, entre otras ventajas, la constituye la transmisión magnética que elimina el tren de engranes.

Un rasgo importante de los caudalímetros, ya sean de pasta o de velocidad, es que en realidad en ellos el fenómeno que se produce no es el de una pérdida secundaria propiamente dicha, debida al fenómeno de desprendimiento, sino que se aprovecha la energía de la corriente para mover un dispositivo; en un sentido estricto son máquinas hidráulicas, aunque a los efectos prácticos conviene considerarlos como accesorios que generan pérdidas locales.

3.9 Otros accesorios

A la lista de accesorios que se han visto podrían agregarse otros, como por ejemplo las *rejas*, *rejillas* y *coladeras*. Ya se ha presentado un caso cuando se habló de la válvula de pie con coladera o pichanca. Otro ejemplo puede ser el de una rejilla colocada en la entrada a una tubería; en todos los casos lo que se persigue es evitar el ingreso de sólidos. No existe mucha información al respecto pero para una rejilla plana completamente sumergida puede obtenerse un valor aproximado del coeficiente K con la fórmula de Creager [9]

$$K_{rej.} = 1.45 \left(\frac{A}{A_n} \right)^2 - 0.45 \left(\frac{A}{A_n} \right) - 1 \quad (3.28)$$

donde A es el área transversal del tubo y A_n es el área neta de paso de la rejilla. La velocidad a emplear en la fórmula de pérdidas 3.6 para aplicar el coeficiente dado por esta fórmula es la media del tubo.

Una recomendación que vale la pena considerar a la hora de diseñar o seleccionar una rejilla es que la pérdida en ella será mayor entre mayor sea la velocidad de paso entre sus aberturas. Por ello es conveniente, siempre que sea factible, disponer la rejilla en forma de bulbo alrededor de la entrada (figura 3.42.a) en lugar de colocarla en forma transversal al flujo (figura 3.42.b); la pichanca de las válvulas de pie y la rejilla que se coloca alrededor del extremo de succión en pozos de bombeo tienen en cuenta esta observación.

Todos los coeficientes K reportados en este capítulo fueron obtenidos o al menos ratificados con base en ensayos en laboratorio o mediciones efectuadas en instalaciones en servicio. Debe tenerse en cuenta sin embargo que las características particulares del diseño de un accesorio pueden tener una fuerte influencia en el valor del coeficiente; de manera que, sobre todo en conducciones importantes, el fabricante debe suministrar información al respecto o bien deben realizarse ensayos, ya sea sobre prototipo o sobre modelo para conocer con precisión el comportamiento hidráulico del accesorio.

3.10 Tendencias modernas para la evaluación del coeficiente K

En el apartado 3.2 se habló de la influencia del número de Reynolds sobre el coeficiente K ; sin embargo se dijo que dicho parámetro rara vez se tiene en cuenta en las tablas y gráficas que reportan el coeficiente, como se pudo apreciar en los ejemplos que se analizaron a lo largo de este capítulo. Pero sin duda habrá observado el lector que en muchos casos el valor de K no es sólo función de la forma del accesorio, sino que se le relaciona también con el diámetro del tubo. El diámetro de alguna manera representa al número de Reynolds porque es proporcional a él pero obliga a limitar la aplicación a conducciones de agua u otro líquido poco viscoso y con velocidades no demasiado alejadas del intervalo considerado económico.

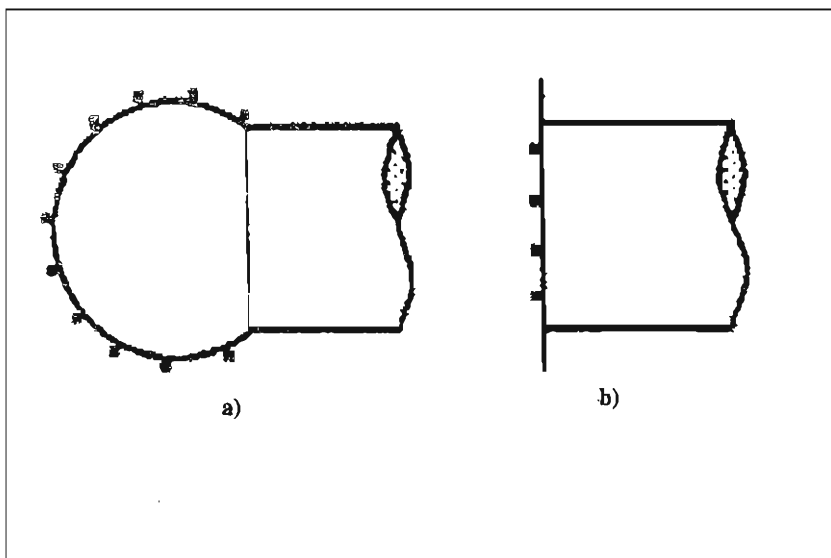


Figura 3.42: a) Rejilla dispuesta en forma de bulbo alrededor de la entrada a un tubo. b) rejilla dispuesta en forma transversal a la entrada del tubo.

En los años recientes varios autores se han preocupado por encontrar un método que permita evaluar el coeficiente K teniendo en cuenta la influencia del número de Reynolds, inclusive considerando la posibilidad de que el flujo sea laminar. En otras palabras de lo que se trata es de llegar a un *método universal* para el cálculo de pérdidas secundarias así como el diagrama de Moody lo es para las primarias. El método de *las dos K* [32], que se introduce a continuación, utiliza dos fórmulas para obtener los coeficientes; la primera de éstas es válida para *válvulas, codos y accesorios T*:

$$K = \frac{K_1}{Re} + K_\infty \left(1 + \frac{1}{D''} \right) \quad (3.29)$$

donde: K_1 es el coeficiente K del accesorio cuando $Re = 1$
 – K_∞ es el mismo coeficiente para turbulencia plena ($Re \rightarrow \infty$)
 – D'' es el diámetro del tubo en pulgadas

En la tabla 3.11 se presentan valores de K_1 y K_∞ para los accesorios mencionados.

La segunda fórmula, que coincide con la propuesta por Altshull [15], es similar a la anterior sólo que se elimina la corrección por diámetro y es válida para *entradas, salidas, expansiones, contracciones y orificios*

$$K = \frac{K_1}{Re} + K_\infty \quad (3.30)$$

Tabla 3.11

Coefficientes K_1 y K_∞ para el método de las dos K

Accesorio	K_1	K_∞
Codo regular a 90°, roscado	800	0.40
Codo regular a 90°, con bridas o soldado	800	0.25
Codo de radio largo a 90° ($r/D = 1.5$)	800	0.20
Codos a 90° formados por gajos rectos soldados:		
1 soldadura (90°)	1,000	1.15
2 soldaduras (45°)	800	0.35
3 soldaduras (30°)	800	0.30
4 soldaduras (22.5°)	800	0.27
5 soldaduras (18°)	800	0.25
Codo regular a 45°	500	0.20
Codo de radio largo a 45°	500	0.15
Codos a 45° formados por gajos rectos soldados:		
1 soldadura (45°)	500	0.25
2 soldaduras (22.5°)	500	0.15
Codo regular a 180°, roscado	1,000	0.60
Codo regular a 180°, con bridas o soldado	1,000	0.35
Codo de radio largo a 180° ($r/D = 1.5$)	1,000	0.30
Acc. T usados como codo (flujo del tubo de entrada al lateral)		
roscado	500	0.70
con bridas o soldado	800	0.80
Acc. T con flujo recto (del tubo de entrada al de salida)		
roscado	200	0.10
a bridas o soldado	150	0.50
Válvula compuerta o esférica abiertas	300	0.10
Válvula de globo standard abierta	1,500	4.00
Válvula de globo angular o en Y abiertas	1,000	2.00
Válvula de mariposa abierta	800	0.25
Válvula antirretorno de obturador ascendente	2,000	10
Válvula antirretorno de obturador oscilante	1,500	1.5

Fuente: Referencia [35]

Los valores de K_{ex} para estos accesorios son los mismos que pueden extraerse de las fórmulas respectivas vista a lo largo de este capítulo. En cuanto a K_1 sus valores extremos son 160 para una entrada y cero para una salida.

Otro método menos refinado que éste es el propuesto por Crane [14] y consiste en calcular el coeficiente K como

$$K = n f_r \quad (3.31)$$

donde n es un factor que depende de la forma del accesorio y f_r del diámetro del tubo. Sólo se aplica para flujo turbulento.

Problema resuelto 3.1: Encontrar la pérdida secundaria debida a los siguientes accesorios en las condiciones de funcionamiento que se indican. En todos los casos el líquido conducido es agua a temperatura ambiente.

- Una expansión brusca de 300 a 400 mm con un gasto de $150 \frac{m^3}{s}$
- Una expansión gradual de 200 a 400 mm con un ángulo de apertura de 15° que conduce un gasto de $95 \frac{m^3}{s}$
- Una reducción brusca de 400 a 300 mm con un gasto de $150 \frac{m^3}{s}$
- Una reducción gradual de 200 a 400 mm con un ángulo de apertura de 15° y un gasto de $95 \frac{m^3}{s}$
- Un codo regular de 90° con unión a bridas de 250 mm de diámetro por el que pasan $80 \frac{m^3}{s}$
- Una curva suave de 90° en un tubo de acero galvanizado de 250 mm de diámetro y un radio de curvatura de 1.1 m, que transporta un gasto de $80 \frac{m^3}{s}$
- La misma curva del inciso f pero con un ángulo de desvío de 60°
- Una válvula de globo totalmente abierta en un tubo de 75 mm de diámetro que conduce $6.5 \frac{m^3}{s}$
- Un medidor de disco rotante de 2 pulgadas de diámetro por el que pasan 85 gpm .

Solución: En todos los cálculos se expresan las distintas variables en las unidades metro, $\frac{m^3}{s}$, $\frac{m^3}{s}$ o $\frac{m^3}{s^2}$

- Empleando la fórmula de Borda 3.14 resulta

$$K_{ex.b} = \left[1 - \left(\frac{0.3}{0.4} \right)^2 \right]^2 = 0.191$$

La velocidad media del tramo de aguas arriba es

$$U_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.15}{\pi \times 0.3^2} = 2.12 \frac{m}{s}$$

La pérdida resulta por lo tanto:

$$h_{ex.b} = K_{ex.b} \frac{U_1^2}{2g} = 0.191 \times \frac{2.12^2}{19.6} = 0.0437 \text{ m}$$

- b) Se usa la fórmula 3.16, en la que se reemplaza $A_2/A_1 = (D_2/D_1)^2$. El coeficiente C_a se extrae de la figura 3.7; para $\theta = 15^\circ$ es $C_a = 0.28$

$$K_{ex.g} = 0.28 \times \left[1 - \left(\frac{0.2}{0.4} \right)^2 \right]^2 = 0.157$$

La velocidad media del tramo de aguas arriba es:

$$U_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.095}{\pi \times 0.2^2} = 3.02 \text{ m/s}$$

La pérdida resulta:

$$h_{ex.g} = K_{ex.g} \frac{U_1^2}{2g} = 0.157 \times \frac{3.02^2}{19.6} = 0.073 \text{ m}$$

Si en lugar de emplear la fórmula 3.16 combinada con la figura 3.7 para evaluar el coeficiente, se opta por usar la tabla 3.2, resulta $K_{ex.g} = 0.16$, valor que prácticamente no difiere del anterior.

- c) De la tabla 3.3 se obtiene el coeficiente de contracción C_c , para lo cual debe calcularse la relación A_2/A_1

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 = \left(\frac{0.3}{0.4} \right)^2 = 0.562$$

Interpolando en la tabla resulta $C_c = 0.700$

Aplicando la fórmula (3.21) resulta

$$K_{rd.b} = \left(\frac{1}{0.7} - 1 \right)^2 = 0.184$$

La velocidad U_2 del tramo de aguas abajo, es igual a la U_1 del inciso a, pues se trata del mismo accesorio puesto a trabajar en forma invertida.

$$U_2 = 2.12 \text{ m/s}$$

y...

$$h_{rd.b} = 0.184 \times \frac{2.12^2}{19.6} = 0.042 \text{ m}$$

Los valores de $K_{rd.b}$ propuestos por Kisilev y Weisbach, y que se pueden extraer de la misma tabla 3.3 son, respectivamente, 0.22 y 0.27. o sea algo mayores que el obtenido por la fórmula 3.21.

d) De la figura 3.10, para un ángulo de 15° y una relación $D_1/D_2 = 2$, resulta

$$K_{rd.g} = 0.08$$

La velocidad media U_2 , del tramo de aguas abajo, es igual a la U_1 del inciso b

$$U_2 = 3.02 \text{ m/s}$$

entonces:

$$h_{rd.g} = 0.08 \times \frac{3.02^2}{19.6} = 0.037 \text{ m}$$

e) De la figura 3.12 se puede extraer el coeficiente K de un codo regular a 90° con unión a bridas y un diámetro de 250 mm, el cual resulta ser

$$K_{co.} = 0.25$$

La velocidad media es:

$$U_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.08}{\pi \times 0.25^2} = 1.63 \text{ m/s}$$

entonces:

$$h_{co.} = 0.25 \times \frac{1.63^2}{19.6} = 0.034 \text{ m}$$

f) El coeficiente $K_{cur.}$ se obtiene de la figura 3.16, para lo cual se entra con los siguientes parámetros:

$$\frac{r_c}{D} = \frac{1.1}{0.25} = 4.4$$

$$y... \quad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.15 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} = 0.0006$$

(de la tabla 2.1 se extrajo la rugosidad absoluta del acero galvanizado)

El valor de que resulta de la gráfica es $K_{cur} = 0.14$; en este caso no debe hacerse ninguna corrección por tratarse de una curva a 90° . La velocidad media es la misma que en el inciso anterior por tratarse del mismo gasto y diámetro; entonces:

$$h_{cur} = 0.14 \times \frac{1.63^2}{19.6} = 0.019 \text{ m}$$

g) La única diferencia con el inciso anterior es que, de acuerdo con la misma figura 3.16

$$K_{cur.}(\theta) = K_{cur.} \frac{\theta}{90} = 0.14 \times \frac{60}{90} = 0.093$$

entonces:

$$h_{cur.} = 0.093 \times \frac{1.63^2}{19.6} = 0.013 \text{ m}$$

h) El coeficiente K de una válvula globo se puede obtener de la tabla 3.6. Para apertura total y 75 mm de diámetro resulta interpolando:

$$K_{v.g.a} = 7.3$$

La velocidad media del tubo es:

$$U_1 = \frac{4 \times 0.0065}{\pi \times 0.075^2} = 1.47 \text{ m/s}$$

Con lo que la pérdida resulta:

$$h_{v.g.a} = 7.3 \times \frac{1.47^2}{19.6} = 0.80 \text{ m}$$

i) El cálculo del coeficiente K de un medidor de disco rotante se hará con la fórmula 3.27; de acuerdo al enunciado el diámetro es de 2" = 0.05 m

$$K_{med.} = 100 \times 0.05^{0.67} = 13.4$$

$$\text{El gasto es de } 85 \text{ gpm} = \frac{3.78 \times 85}{60 \times 1000} \text{ m}^3/\text{s} = 0.00535 \text{ m}^3/\text{s}$$

La velocidad media es

$$U_1 = \frac{4 \times 0.00535}{\pi \times 0.05^2} = 2.72 \text{ m/s}$$

La pérdida será entonces:

$$h_{med.} = 13.4 \times \frac{2.72^2}{19.6} = 5.06 \text{ m}$$

Problema resuelto 3.2: Calcular las pérdidas que se producen en un accesorio Y, en el que los diámetros son de 500 mm. Efectuar el cálculo para los casos que se indican en la figura 3.43

Solución: Este problema se resolverá de acuerdo con la tabla 3.4, las fórmulas y los esquemas que en ella se presentan.

a) En el caso de una bifurcación son dos las pérdidas a calcular: $h_{\theta-s}$ a lo largo de la conducción principal y $h_{\theta-l}$ entre la conducción principal y la derivación lateral. En este caso es válida la fórmula 1.52 del problema resuelto 1.6, en el que se aplicaron las ecuaciones de conservación a una situación parecida:

$$\left(Z_{\theta} + \frac{P_{\theta}}{\gamma} + \frac{U_{\theta}^2}{2g} \right) - \left(Z_s + \frac{P_s}{\gamma} + \frac{U_s^2}{2g} \right) = h_{\theta-s} \quad (1.52)$$

$$\left(Z_{\theta} + \frac{P_{\theta}}{\gamma} + \frac{U_{\theta}^2}{2g} \right) - \left(Z_l + \frac{P_l}{\gamma} + \frac{U_l^2}{2g} \right) = h_{\theta-l}$$

Para obtener ambas pérdidas, la fórmula de la tabla 3.4 requiere del cálculo de la velocidad media de la corriente total:

$$U_{\theta} = \frac{4 Q_{\theta}}{\pi D_{\theta}^2} = \frac{4 \times 0.38}{\pi \times 0.5^2} = 1.94 \text{ m/s}$$

Cálculo de $h_{\theta-s}$: De tabla mencionada, para una bifurcación en Y, los coeficientes para el cálculo de $K_{\theta-s}$ son:

$$\begin{aligned} A &= 0.121 \\ B &= -0.243 \\ C &= 0.580 \end{aligned}$$

y...

La fórmula a aplicar es:

$$K_{\theta-s} = A + B \left(Q/Q_{\theta} \right) + C \left(Q/Q_{\theta} \right)^2$$

reemplazando valores:

$$K_{\theta-s} = 0.121 - 0.243 \left(\frac{0.125}{0.38} \right) + 0.58 \left(\frac{0.125}{0.38} \right)^2 = 0.104$$

con lo que

$$h_{\theta-s} = 0.104 \times \frac{1.94^2}{19.6} = 0.020 \text{ m}$$

Cálculo de $h_{\theta-l}$: Para el cálculo de $K_{\theta-l}$ los coeficientes de la tabla son:

$$\begin{aligned}
 A &= 0.918 \\
 B &= -1.508 \\
 C &= 1.049
 \end{aligned}$$

y...

Aplicando la fórmula:

$$K_{\theta-I} = 0.918 - 1.508 \left(\frac{0.125}{0.38} \right) + 1.049 \left(\frac{0.125}{0.38} \right)^2 = 0.535$$

entonces

$$h_{\theta-I} = 0.535 \times \frac{1.94^2}{19.6} = 0.103 \text{ m}$$

- b) En el caso de una unión las pérdidas a calcular son $h_{\theta-S}$ y h_{I-S} . Las ecuaciones de energía que permiten definir las son muy parecidas a las presentadas en el inciso anterior. La velocidad media de la corriente total, que también se requiere para estos cálculos, es la misma que en la bifurcación que acaba de calcularse dada la coincidencia en los datos del problema; sólo que aquí dicha velocidad corresponde al tramo de salida

$$U_s = 1.94 \text{ m/s}$$

Cálculo de $h_{\theta-S}$: Los coeficientes para el cálculo de $K_{\theta-S}$ son:

$$\begin{aligned}
 A &= 0.354 \\
 B &= 1.07 \\
 C &= -1.621
 \end{aligned}$$

y...

$$K_{\theta-S} = 0.354 + 1.037 \left(\frac{0.125}{0.38} \right) - 1.621 \left(\frac{0.125}{0.38} \right)^2 = 0.201$$

$$h_{\theta-S} = 0.201 \times \frac{1.94^2}{19.6} = 0.039 \text{ m}$$

Cálculo de h_{I-S} : Los coeficientes para el cálculo de K_{I-S} son:

$$\begin{aligned}
 A &= 0.908 \\
 B &= 2.882 \\
 C &= -1.612
 \end{aligned}$$

y...

$$K_{I-S} = -0.908 + 2.882 \left(\frac{0.125}{0.38} \right) - 1.612 \left(\frac{0.125}{0.38} \right)^2 = -0.134$$

$$h_{I-S} = -0.134 \times \frac{1.94^2}{19.6} = -0.026 \text{ m}$$

Ocurre aquí algo que sin duda llamará la atención del lector y que aparentemente contradice lo sostenido hasta ahora, ya que se obtuvo una *pérdida negativa*. Inclusive podría pensarse que se ha encontrado un accesorio que *crea* energía en lugar de consumirla. Por supuesto que esto es una falacia y para encontrar una explicación es conveniente volver al mencionado problema resuelto 1.6. En aquella oportunidad se dijo que la forma correcta de escribir la ecuación de la energía para una unión triple es la expresión 1.51, en la cual se multiplican las energías en las entradas y salidas por los gastos respectivos. La fórmula 1.52, que es la que se emplea habitualmente por su manejo más sencillo, es lícita pero con la salvedad de que la cantidad h no siempre es una pérdida de energía en forma de calor en un sentido estricto, pero sí representa la diferencia de energía hidráulica entre las secciones extremas, que es lo que interesa en definitiva.

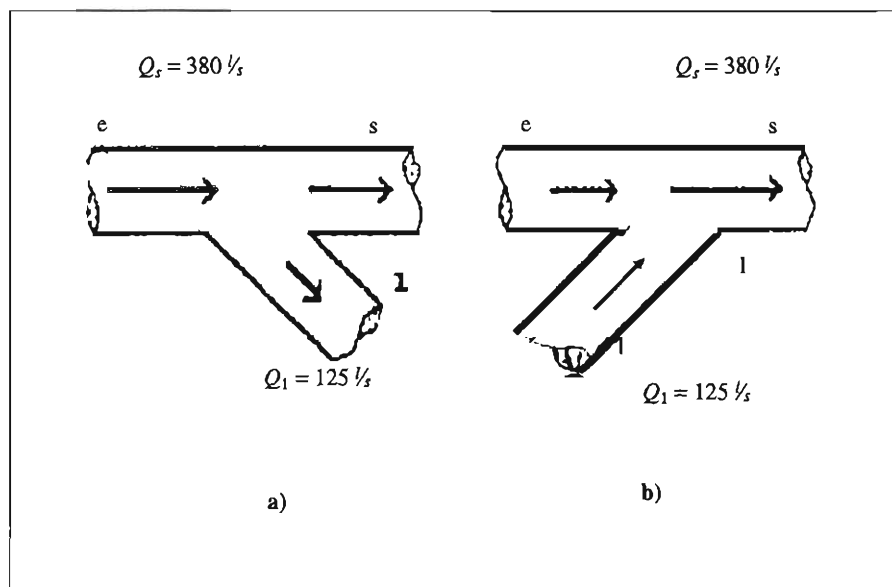


Figura 3.43: Problema resuelto 3.2.

Problema resuelto 3.3:

- Calcular la pérdida que provoca una válvula de compuerta por la que pasa un gasto de 180 l/s con un diámetro de 350 mm para los casos de totalmente abierta, 50% cerrada y 75% cerrada.
- El mismo caso pero con una válvula aguja.
- El mismo caso pero con una válvula mariposa.
- El mismo caso pero con una válvula esférica.

Ordenar los resultados en una tabla

Solución: La velocidad media del flujo es la misma en todos los incisos

$$U = \frac{4 Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.18}{\pi \times 0.35^2} = 1.87 \text{ m/s}$$

- a) Los coeficientes K para una *válvula de compuerta* se pueden obtener por combinación de las dos partes de la tabla 3.5; de la parte a se extrae el K correspondiente a una válvula totalmente abierta de 350 mm (14 pulgadas) de diámetro.

$$K_{v.c.a.} = 0.05$$

Este valor se obtiene interpolando entre 8 y 20 pulgadas, que son los diámetros que figuran tabulados. Usando la parte b de la tabla se obtienen los factores de corrección para calcular los coeficientes correspondientes a distintas relaciones de cierre; para ello deben multiplicarse dichos factores por el ya conocido $K_{v.c.a.}$ ¹

$$K_{v.c. (50\% \text{ cerrada})} = 17 \times K_{v.c.a.} = 17 \times 0.05 = 0.85$$

$$K_{v.c. (75\% \text{ cerrada})} = 95 \times K_{v.c.a.} = 95 \times 0.05 = 4.75$$

Las pérdidas resultan

$$h_{v.c.a.} = 0.05 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 0.009 \text{ m}$$

$$h_{v.c. (50\% c.)} = 0.85 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 0.151 \text{ m}$$

$$h_{v.c. (75\% c.)} = 4.75 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 0.845 \text{ m}$$

- b) Para una *válvula de aguja* se obtienen los coeficientes de la tabla 3.7

$$K_{v.ag.a} = 9$$

$$K_{v.ag. (50\% c.)} = 20$$

$$K_{v.ag. (75\% c.)} = 122$$

Las pérdidas son:

$$h_{v.ag.a} = 9 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 1.61 \text{ m}$$

¹ En la tabla no figura un valor preciso para estos factores sino un rango; aquí se optó por tomar el promedio.

$$h_{v.ag. (50\% c.)} = 20 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 3.57 \text{ m}$$

$$h_{v.ag. (75\% c.)} = 122 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 21.76 \text{ m}$$

c) Para una *válvula de mariposa* se obtienen los coeficientes de la tabla 3.8

$$K_{v.m.a} = 0.05$$

$$K_{v.m. (50\% c.)} = 18.7$$

$$K_{v.m. (75\% c.)} = 440$$

Las pérdidas son:

$$h_{v.m.a} = 0.05 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 0.009 \text{ m}$$

$$h_{v.m. (50\% c.)} = 18.7 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 3.33 \text{ m}$$

$$h_{v.m. (75\% c.)} = 440 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 78.5 \text{ m}$$

d) Finalmente para una *válvula esférica* se extraen los coeficientes de la tabla 3.9

$$K_{v.es.a} = 0.05$$

$$K_{v.es. (50\% c.)} = 31.2$$

$$K_{v.es. (75\% c.)} = 750$$

Las pérdidas resultan:

$$h_{v.es.a} = 0.05 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 0.009 \text{ m}$$

$$h_{v.es. (50\% c.)} = 31.2 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 5.57 \text{ m}$$

$$h_{v.es. (75\% c.)} = 750 \times \frac{1.87^2}{19.6} = 134 \text{ m}$$

A continuación se ordenan los resultados en una tabla como lo pide el enunciado

Pérdidas (en metros) para diversas válvulas a gasto constante de 180 l/s y tubo de 350 mm

tipo	válvula abierta	válvula 50% cerrada	válvula 75% cerrada
compuerta	0.009	0.151	0.845
aguja	1.61	3.57	21.76
mariposa	0.009	3.33	78.5
esférica	0.009	5.57	134

Los comentarios que surgen de esta tabla son coherentes con lo que se dijo en el texto: Se ve que la válvula de compuerta es de todas la menos sensible al cierre, lo cual revela que no es adecuada para el control de flujo, a diferencia de las demás que sí lo son. La válvula de aguja tiene una pérdida considerable aun estando completamente abierta, debido al trayecto complicado que debe recorrer el líquido dentro de ella.

Problema resuelto 3.4: En un tubo de 200 mm de diámetro se requiere medir flujos de 25 a 75 l/s. Calcular las pérdidas mínima y máxima que para este intervalo de gastos provocan los siguientes accesorios:

- Un medidor Venturi cuyo difusor tiene un ángulo de apertura de 10° .
- Una tobera.
- Una placa orificio.

Tanto la garganta del venturímetro como la boquilla y el orificio son de 100 mm de diámetro.

Solución: La velocidad media del tubo es un dato común para los tres incisos del problema. Dicha velocidad tendrá un valor máximo y un mínimo para el rango a medir

$$U_{\max} = \frac{4 \times 0.075}{\pi \times 0.2^2} = 2.39 \text{ m/s}$$

$$U_{\min} = \frac{4 \times 0.025}{\pi \times 0.2^2} = 0.80 \text{ m/s}$$

- Para el medidor Venturi se empleará la fórmula 3.24. El coeficiente C_d se obtiene de la figura 3.7 en función del ángulo de apertura del tramo divergente, que en este caso vale 10° . En esta fórmula, así como en las de los otros medidores, se reemplaza $A_{V_{A_2}} = \left(\frac{D}{d} \right)^2$

$$K_{vent.} = 0.16 \times \left[\left(\frac{0.2}{0.1} \right)^2 - 1 \right]^2 = 1.44$$

La pérdida provocada por el venturímetro será:

$$h_{vent.} (máx) = 1.44 \times \frac{2.39^2}{19.6} = 0.42 \text{ m}$$

$$h_{vent.} (mín) = 1.44 \times \frac{0.80^2}{19.6} = 0.047 \text{ m}$$

b) El valor de K para una tobera se calcula por la fórmula 3.25

$$K_{tobera} = \left[\left(\frac{0.2}{0.1} \right)^2 - 1 \right]^2 = 9$$

$$h_{tobera} (máx) = 9 \times \frac{2.39^2}{19.6} = 2.62 \text{ m}$$

$$h_{tobera} (mín) = 9 \times \frac{0.80^2}{19.6} = 0.29 \text{ m}$$

c) El coeficiente K de una placa orificio se obtiene de la fórmula 3.26 donde, como ya se ha dicho, puede aceptarse que el coeficiente de contracción C_c vale 0.6

$$K_{p.o.} = \left[\frac{0.2^2}{0.6 \times 0.1^2} - 1 \right]^2 = 32$$

$$h_{p.o.} (máx) = 32 \times \frac{2.39^2}{19.6} = 9.31 \text{ m}$$

$$h_{p.o.} (mín) = 32 \times \frac{0.80^2}{19.6} = 1.04 \text{ m}$$

Problema resuelto 3.5: Una bomba centrífuga que entrega un gasto de $250 \text{ m}^3/\text{hora}$ tiene un diámetro de salida de 150 mm. Sin embargo el tubo de descarga es de 250 mm, por lo cual se decide emplear un difusor a fin de vincular ambos elementos (figura 3.44). Calcular la pérdida debida al difusor si su longitud es de 600 mm.

Solución: Es un hecho que frecuentemente el diámetro de la brida de descarga de las bombas centrífugas es menor que el recomendado para el tubo de descarga de la instalación, por lo cual es necesario colocar un difusor en la salida de la bomba. El patrón de flujo en este accesorio posee una particularidad que no ocurría, o al menos así podía suponerse, en los otros ejemplos vistos: Se dijo en el apartado 3.2 que en todo momento se haría la hipótesis de que el flujo llega paralelo y libre de macroturbulencias al accesorio;

para asegurar esto es preciso que este se vea precedido de un tramo recto de tubo y libre de singularidades en una longitud de al menos diez veces el diámetro. Sin duda que esto no ocurre en este caso ya que inmediatamente antes del difusor no hay tal tramo de tubo sino la propia bomba. Esto significa que el cálculo de la pérdida se puede ver afectado de un error debido a la configuración del flujo antes del accesorio. Sin embargo se procederá según los elementos disponibles a falta de ayudas de cálculo ex-profeso; en este caso se obtendrá la pérdida correspondiente a una expansión gradual pero, al igual que en el medidor Venturi, la velocidad a emplear en la fórmula será la del diámetro de salida, o sea la del tubo de descarga, ya que el diámetro de entrada del difusor no corresponde a tubo alguno.

$$Q = 250 \frac{m^3}{hora} = \frac{250 \frac{m^3}{s}}{3600} = 0.0694 \frac{m^3}{s}$$

$$U_1 = \frac{4 \times 0.0694}{\pi \times 0.25^2} = 1.41 \frac{m}{s} \quad (\text{velocidad media del tubo de descarga})$$

La fórmula para evaluar $K_{dif.}$ es la misma 3.24 empleada en el venturímetro

$$K_{dif.} = C_a \left(A_1/A_2 - 1 \right)^2$$

donde A_1 es la sección del tubo de descarga y A_2 la sección de la brida de salida de la bomba. Como en otras ocasiones, se reemplazará $A_1/A_2 = \left(D_1/D_2 \right)^2$. El coeficiente C_a se obtiene de la figura 3.7 para lo cual es preciso hallar el ángulo de apertura. Este ángulo θ se calcula como sigue

$$\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\frac{1}{2} (D_1 - D_2)}{L_{dif}} = \frac{250 - 150}{2 \times 600} = 0.0833$$

$$\theta = 2 \arctan 0.0833 = 9.53^\circ \approx 10^\circ$$

Para un ángulo de 10° resulta, de la mencionada figura 3.7, un coeficiente $C_a = 0.16$. Reemplazando en la fórmula de $K_{dif.}$

$$K_{dif.} = 0.16 \times \left[\left(\frac{0.25}{0.15} \right)^2 - 1 \right]^2 = 0.506$$

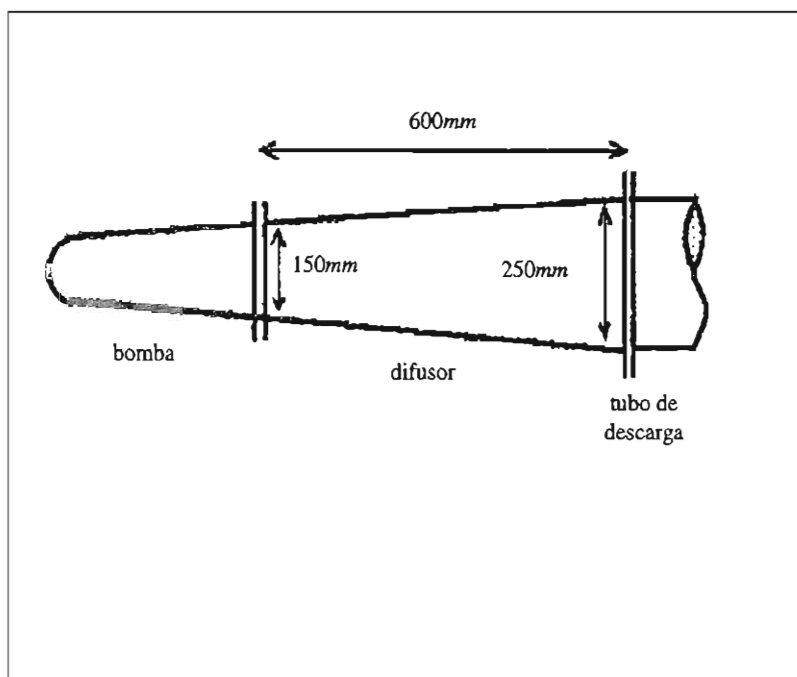


Figura 3.44: Problema resuelto 3.5.

con lo que

$$h_{dif.} = K_{dif.} \frac{U^2}{2g} = 0.506 \times \frac{1.41^2}{19.6} = 0.051 \text{ m}$$

Problema resuelto 3.6: Encontrar la pérdida provocada por un codo a 90° formado por un gajo recto con dos soldaduras a 45° (similar al que se ve en el detalle de la figura 4.1) siendo el diámetro de la tubería de 150 mm, para los siguientes casos

- El líquido es agua a temperatura ambiente y el gasto de 40 l/s
- El líquido es un aceite de viscosidad absoluta $\mu = 0.25 \text{ kg/ms}$ y densidad $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ y el gasto es de 22 l/s
- El mismo líquido del inciso b) pero con un gasto de 6 l/s

Solución: Este problema ilustra sobre la aplicación del método de las dos K para el cálculo de pérdidas secundarias en flujos viscosos. Aunque no es necesario, pero con el fin de comparar los casos presentados, también se aplicará dicho método al inciso a) en el que el líquido es agua. De acuerdo a la tabla 3.11 los valores de K_1 y K_∞ para un codo del tipo del que se describe en el enunciado, son

$$K_1 = 800$$

$$K_\infty = 0.35$$

a) La velocidad media del flujo es

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.04}{\pi \times 0.15^2} = 2.26 \text{ m/s}$$

El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{UD}{L} = \frac{2.26 \times 0.15}{10^{-6}} = 340,000$$

De acuerdo con la fórmula 3.29 el valor de K es

$$K = \frac{K_1}{\text{Re}} + K_\infty \left(1 + \frac{1}{D''} \right) = \frac{800}{340,000} + 0.35 \left(1 + \frac{1}{6} \right) = 0.41$$

(Recuérdese que D'' es el diámetro del tubo a pulgadas)

Finalmente la pérdida producida por el codo es

$$H_{co} = K \frac{U^2}{2g} = 0.41 \times \frac{2.26^2}{19.6} = 0.107 \text{ m}$$

b) La velocidad media es

$$U = \frac{4 \times 0.022}{\pi \times 0.15^2} = 1.24 \text{ m/s}$$

El número Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{UD}{L} = \frac{\rho UD}{\mu} = \frac{900 \times 1.24 \times 0.15}{0.025} = 6,700$$

El valor de K es

$$K = \frac{800}{6,700} + 0.35 \left(1 + \frac{1}{6} \right) = 0.528$$

... y la pérdida
$$h_{co} = 0.528 \times \frac{1.24^2}{19.6} = 0.041 \text{ m}$$

c) La velocidad media es
$$U = \frac{4 \times 0.006}{\pi \times 0.15^2} = 0.34 \text{ m/s}$$

El número de Reynolds
$$Re = \frac{900 \times 0.34 \times 0.15}{0.025} = 1840$$

El valore de K
$$K = \frac{800}{1840} + 0.35 \left(1 + \frac{1}{6} \right) = 0.843$$

... y la pérdida
$$h_{co} = 0.843 \times \frac{0.34^2}{19.6} = 0.0050 \text{ m}$$

Resumen del capítulo

- * Las pérdidas secundarias se originan por la presencia de singularidades en la tubería, que son los accesorios empleados con diversos fines. La presencia de los mismos origina zonas de flujo secundario en las que hay una fuerte turbulencia que disipa localmente una porción de la energía hidráulica en la corriente.
- * Por aplicación del análisis dimensional se llega a la expresión general para evaluar la pérdida h_a de un accesorio cualquiera

$$h_a = K \frac{U^2}{2g}$$

donde K es un coeficiente que depende de la forma geométrica del accesorio y de número de Reynolds

- * Las expansiones y reducciones son accesorios empleados para cambiar el diámetro de la conducción; las primeras generan mayores pérdidas que las segundas; a su vez la pérdida puede reducirse si la transición es gradual en lugar de brusca.
- * Los codos y curvas se emplean para cambiar la dirección del flujo; los primeros son más cerrados que las segundas.
- * Las válvulas son accesorios que sirven para controlar el flujo de diversas formas; para iniciarlo (válvula de compuerta), para regularlo (válvula de mariposa y esférica), para controlar su sentido (válvula antirretorno), para controlar la presión (válvula de alivio) o reducirla (reductora de presión), etc. Su grado de obstrucción al flujo es variable y de ello dependerá la pérdida; si su apertura es regulable, el coeficiente K se ve afectado por ello.

- * Otros accesorios que provocan pérdidas son los medidores de flujo de diversos tipos y las rejas o coladeras.
- * Los coeficientes K se obtienen de gráficas, tablas, ábacos y fórmulas basados en resultados experimentales. Si no se dispone de tal información y la magnitud del problema lo amerita, es conveniente y hasta preciso verificar el comportamiento hidráulico del accesorio mediante ensayos.
- * Se han propuesto metodologías para tener en cuenta la influencia del número de Reynolds sobre el coeficiente K , lo cual es importante en el caso de flujo laminar.

Problemas propuestos

3.1 Encontrar la pérdida secundaria debida a los siguientes accesorios en las condiciones de funcionamiento que se indica.

- a) Una expansión brusca de 40 a 50 cm con un gasto de $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$.
- b) Una expansión gradual de 10 a 30 cm con un ángulo de apertura de 10° que conduce un gasto de $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$.
- c) Una reducción brusca de 50 a 40 cm con un gasto de $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$.
- d) Una reducción gradual de 30 a 10 cm con un ángulo de apertura de 10° y un gasto de $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$.
- e) Un codo regular de 45° con unión a rosca, de 250 mm de diámetro por el que pasan 90 l/s .
- f) Una curva suave de 45° en un tubo de PVC de 250 mm de diámetro y con un radio de curvatura de 0.9 m, que transporta un gasto de 90 l/s .
- g) La misma curva del inciso f pero con un ángulo de desvío de 90° .
- h) Una válvula de compuerta totalmente abierta, en un tubo de 60 mm de diámetro que conduce 4.5 l/s .

3.2 Encontrar la pérdida secundaria debida a los siguientes accesorios en las condiciones de funcionamiento que se indican.

- a) Una expansión brusca de 200 a 300 cm con un gasto de 100 l/s .
- b) Una expansión gradual de 150 a 350 mm con un ángulo de apertura de 15° que conduce un gasto de 80 l/s .
- c) La salida de un tubo de 400 mm de diámetro interior por lo cual un flujo de 100 l/s desemboca en un tanque receptor.
- d) Una entrada de aristas vivas que conecta un tanque con su tubo de drenaje, el cual conduce 80 l/s . El tubo tiene 200 mm de diámetro.
- e) Un codo de 180° con unión a bridas, de 350 mm de diámetro por el cual fluyen $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$.
- f) Una curva suave de 90° en un tubo de fierro fundido de 300 mm de diámetro y un radio de curvatura de 1.5 m, que transporta un gasto de 90 l/s .
- g) Una válvula de aguja semicerrada (50%) por la cual fluyen 7 l/s con un diámetro interno de 2 pulgadas.
- h) Una rejilla plana completamente sumergida colocada en un tubo de 250 mm de diámetro y para una área neta de paso de la rejilla de 350 cm^2 , por la cual fluyen 16 l/s .

3.3 Encontrar la pérdida secundaria debida a los siguientes accesorios en las condiciones de funcionamiento que se indican.

- a) Una válvula de pie con coladera con un gasto de 40 l/s montada en un tubo de 250 mm de diámetro.

- b) Una válvula antirretorno con bridas y un gasto de 50 l/s instalada en un tubo de 300 mm de diámetro.
- c) Un codo de 45°, de radio grande, con bridas, para un gasto de 95 l/s en un tubo de 75 mm de diámetro.
- d) Una placa orificio insertada en un tubo de 250 mm de diámetro por donde fluyen 5 l/s. El diámetro del orificio es de 100 mm.

3.4 Calcular las pérdidas que se producen en un accesorio T, en el que el valor de los tres diámetros es de 400 mm. Referirse a la figura 3.45.

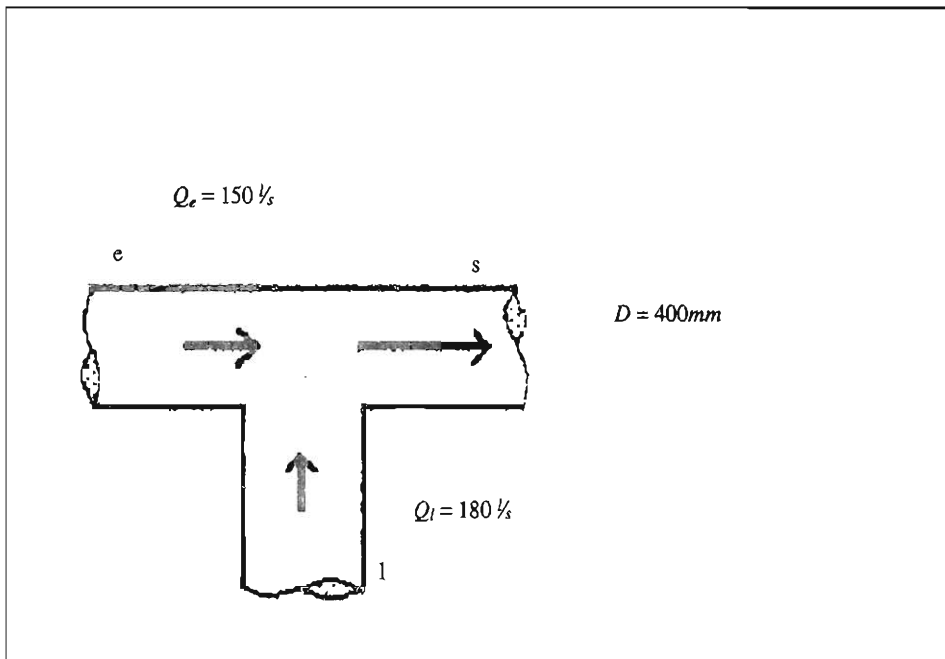


Figura 3.45: Problema propuesto 3.4.

3.5 Calcular las pérdidas que se producen en un accesorio Y que sirve como bifurcación, según se muestra en la figura 3.46. Todos los diámetros son de 450 mm.

3.6 Resolver el problema 3.4 utilizando los mismos datos pero considerando el accesorio T como bifurcación (invertir el sentido de los gastos de la figura); comparar los resultados con los de aquél problema.

3.7 Resolver el problema 3.5 utilizando los mismos datos pero considerando el accesorio Y como una unión (invertir el sentido de los gastos de la figura) y comparar resultados.

3.8

- a) Calcular la pérdida que provoca un medidor Venturi por el cual fluye un gasto de 150 l/s. El diámetro del tubo es de 300 mm y el de la garganta de 200 mm.

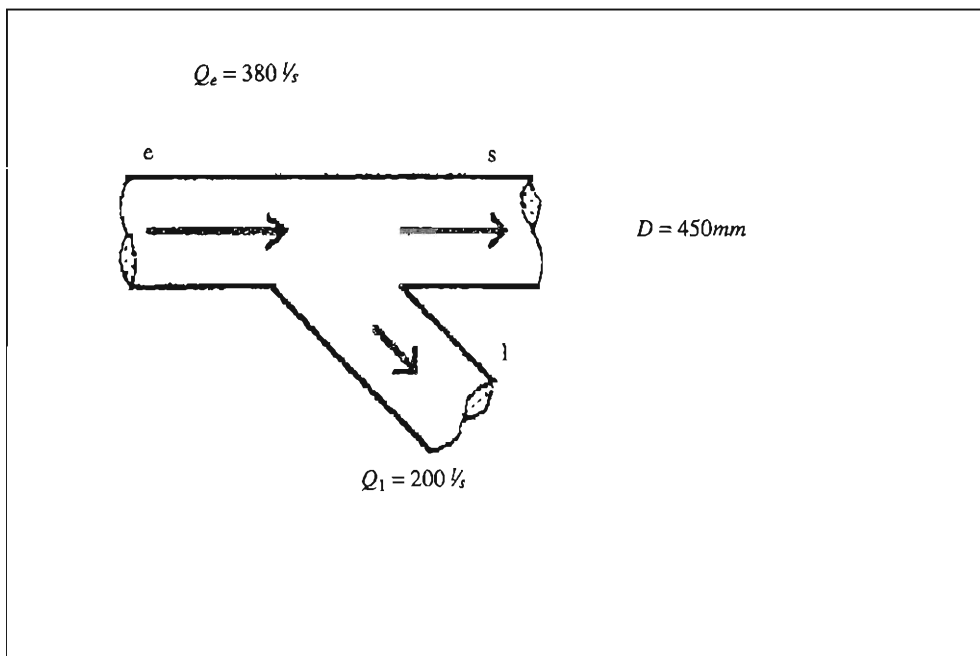


Figura 3.46: Problema propuesto 3.5.

- b) El mismo caso pero con una tobera de 150 mm de diámetro en la boquilla.
 - c) El mismo caso pero con una placa orificio de 100 mm de diámetro.
- Ordenar los resultados en una tabla y compararlos entre sí.

3.9

- a) Calcular la pérdida que provoca un codo de radio grande, con unión a rosca, de 90° y 100 mm de diámetro, por el cual fluyen 16 l/s.
- b) Calcular la pérdida para una curva suave de 90° en un tubo de asbesto-cemento de 250 mm de diámetro y un radio de curvatura de 1 m, por el cual fluyen 80 l/s.
- c) El mismo caso pero con una válvula de codo.
- d) El mismo caso pero con una válvula antirretorno de obturados oscilante.

3.10 Para el ejemplo de la figura 3.47 puede suponerse que toda la pérdida está ocasionada por la válvula.

- a) ¿Cuánto vale el coeficiente K de la válvula si es del tipo compuerta?
- b) Suponiendo que se trate de una válvula globo, establecer si está parcial o completamente abierta.

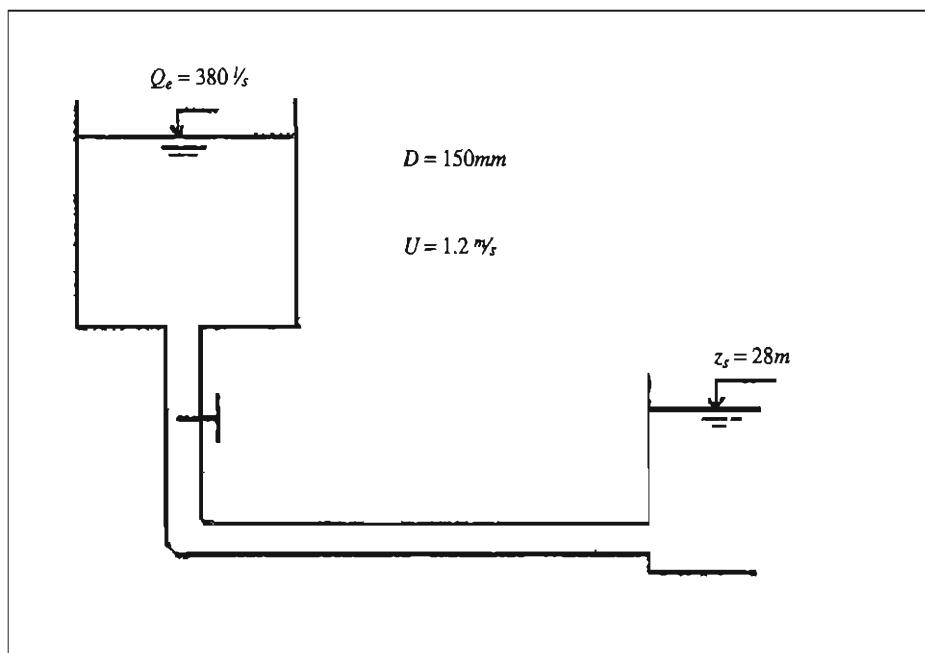


Figura 3.47: Problema propuesto 3.10

3.11 Seleccionar cinco incisos de los problemas propuestos 3.1 y 3.2 que estén tipificados en la tabla 3.11 y resolverlos suponiendo que:

- a) El líquido conducido posee una viscosidad $\nu = 6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
- b) El líquido conducido posee una viscosidad $\nu = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

CAPITULO 4

TUBO

SENCILLO

4. TUBO SENCILLO

- 4.1 Cálculo de pérdidas en tubos con accesorios
- 4.2 Importancia relativa de las pérdidas secundarias
- 4.3 Longitudes equivalentes
- 4.4 Cálculo del gasto en tubos con accesorios
- 4.5 Conducciones en bombas y turbinas
- 4.6 Gasto en ruta
- 4.7 Flujo no permanente
- 4.8 Diámetro económico

4.1 Cálculo de pérdidas en tubos con accesorios

En este capítulo se aplicarán los métodos y ecuaciones vistos en los anteriores para resolver tubos sencillos, entendiendo por tales a los que poseen características físicas uniformes a lo largo de su recorrido; en otras palabras su diámetro y su rugosidad deben mantenerse constantes; sin embargo podrá aceptarse que tengan accesorios que provoquen pérdidas secundarias.

Para calcular las pérdidas totales en un tubo, se recordarán algunas fórmulas presentadas en los capítulos anteriores

$$H_f = h_f + h'_a \quad (1.25)$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (2.11)$$

La primera de esta fórmula dice simplemente que la pérdida total es igual a la suma de las primeras más las secundarias y la segunda es la ecuación de Darcy-Weissbach que evalúa las pérdidas primarias. En cuanto a las secundarias, la fórmula 3.6 vista en el capítulo anterior expresa la forma de calcular la pérdida debida a un accesorio específico; ahora bien, si h_a es el total de pérdidas secundarias del tramo, la fórmula para evaluarla será:

$$h_a = \Sigma K \frac{U^2}{2g} \quad (4.1)$$

donde ΣK es la suma de los coeficientes K de los accesorios.

Si se combinan las tres fórmulas presentadas, se obtiene la siguiente:

$$H_f = \left[\frac{fL}{D} + \Sigma K \right] \frac{U^2}{2g} \quad (4.2)$$

Esta misma ecuación sugiere el método para calcular las pérdidas totales en un tubo sencillo, que es el siguiente:

- i) Se obtiene el factor de fricción f del diagrama de Moody
- ii) Se obtienen los coeficientes K de los accesorios

iii) Se aplica la fórmula 4.2 para calcular las pérdidas totales H_f .

No vale la pena agregar más sobre este tema. Lo más indicado es resolver algunos ejemplos y comentar los resultados.

Problema resuelto 4.1: Calcular la diferencia de niveles ($z_o - z_s$) entre el tanque T_o y la salida a la atmósfera de la conducción de la figura 4.1, formada por un tubo de acero comercial de 200 mm de diámetro y 800 m de longitud. El gasto es de 55 l/s de agua a 20°C. Los accesorios son: la entrada de aristas vivas que comunica al tubo con el tanque T_o , una válvula de compuerta abierta, dos codos formados por gajos soldados como se ve en un detalle de la propia figura y una placa orificio con una relación de diámetro de 0.6.

Solución: Si se aplica la ecuación de conservación de la energía entre el tanque T_o y la salida A_s (Ver figura), se obtiene:

$$z_o - \left[z_s + \frac{U_s^2}{2g} \right] = \bar{H}_f$$

Efectivamente, la presión en ambas secciones es nula por ser la atmosférica y en el depósito la energía cinética es despreciable. La incógnita del problema es la diferencia ($z_o - z_s$), la cual se despeja:

$$(z_o - z_s) = \frac{U_s^2}{2g} + H_f \quad (4.3)$$

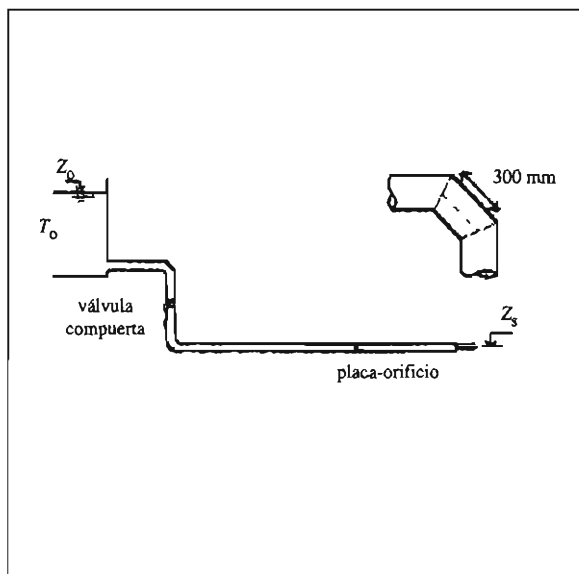


Figura 4.1: Problema resuelto 4.1

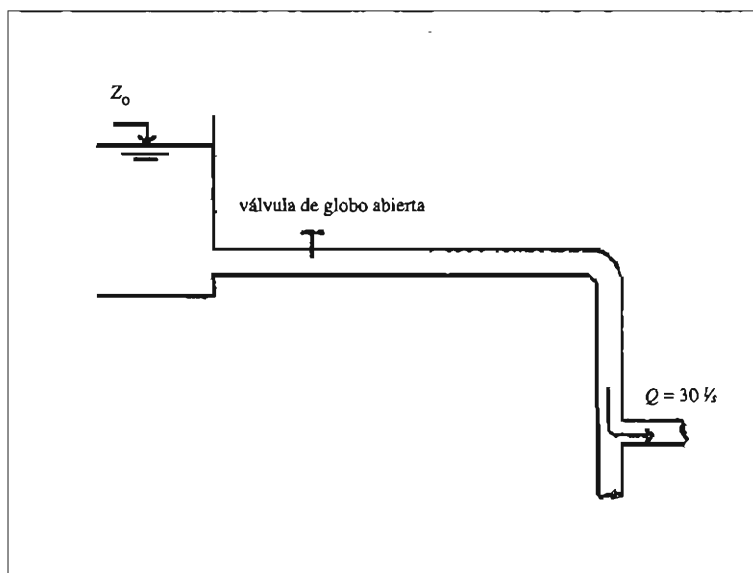


Figura 4.2: Problema resuelto 4.2.

La velocidad media del flujo U se requiere para calcular tanto la energía cinética como la pérdida H_f

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.055}{\pi \times 0.2^2} = 1.75 \text{ m/s}$$

El número de Reynolds se calcula con la viscosidad cinemática del agua a 20°C que es de $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{1.75 \times 0.2}{10^{-6}} = 350,000$$

La rugosidad del acero comercial nuevo es de 0.1 mm, entonces la rugosidad relativa es:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.1}{200} = 0.0005$$

Con esto dos parámetros se obtiene el factor de fricción del diagrama de Moody:

$$f = 0.018$$

Los coeficientes K de los accesorios son los siguientes:

- El de la entrada de aristas vivas es $K_{\text{ent}} = 0.5$ (expresión 3.22).

- El de la válvula de compuerta abierta surge de la tabla 3.5.a, para un tubo de 200 mm $K_{v.c.a.} = 0.07$.
- La figura 3.15 permite obtener el coeficiente de un codo de 90° formado por un gajo soldado, en este caso de 300 mm de longitud y 200 mm de diámetro con dos soldaduras oblicuas; $K_{co} = 0.28$.
- Cuando se dice que una placa orificio tiene una relación de diámetro de 0.6, esto se refiere al diámetro del orificio entre el del tubo (D_2/D_1). Para calcular el coeficiente $K_{p.o.}$ para la fórmula 3.26 debe emplearse la relación $A_1/A_2 = [D_1/D_2]^2 = 1/0.6^2 = 2.78$.

$$K_{p.o.} = \left[\frac{2.78}{0.6} - 1 \right]^2 = 13.2$$

La suma de coeficientes K es:

$$\begin{aligned} \Sigma K &= K_{enu} + K_{v.c.a.} + 2K_{co} + K_{p.o.} = \\ &= 0.5 + 0.07 + 2 \times 0.28 + 13.2 = 14.33 \end{aligned}$$

Reemplazando la fórmula 4.2 en la 4.3 y considerando que no hay diferencia entre U y U_s , ya que el diámetro de salida es el mismo que en cualquier otra sección del tubo, resulta:

$$(z_o - z_s) = \frac{U^2}{2g} + \left[\frac{fL}{D} + \Sigma K \right] \frac{U^2}{2g} \quad (4.4)$$

Basta reemplazar las variables del segundo miembro, que ya se conocen

$$\begin{aligned} (z_o - z_s) &= \frac{1.75^2}{19.6} + \left[\frac{0.18 \times 800}{0.2} + 14 \right] \times \frac{1.75^2}{19.6} = \\ &0.16 + 11.25 + 2.18 = 13.59 \text{ m} \end{aligned}$$

Antes de expresar el resultado final se han escrito por separado las pérdidas primarias y secundarias para apreciar la incidencia relativa de las mismas sobre el total.

Vale la pena hacer algunos comentarios adicionales. En la ecuación 4.3 la energía cinética y las pérdidas aparecen en términos diferentes, lo cual es lógico pues *desde el punto de vista físico* son cosas distintas. Sin embargo, con un *enfoque estrictamente matemático*, es muy fácil integrar ambos términos en uno solo, de manera que la expresión 4.4 tendría el siguiente equivalente:

$$(z_o - z_s) = \left[\frac{fL}{D} + \Sigma K + 1 \right] \frac{U^2}{2g} \quad (4.5)$$

de este modo la energía cinética puede computarse como una *pérdida secundaria cuyo coeficiente K es igual a la unidad*. Inclusive para hacer esta consideración no es necesario que se trate como en este caso de una salida a la atmósfera. Si se plantea la ecuación de la energía entre el tanque T_o y una sección intermedia A_i de la tubería, será:

$$\begin{aligned}
 z_o - \left[z_i + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_i^2}{2g} \right] &= H_f \\
 z_o - \left[z_i + \frac{P_i}{\gamma} \right] &= \frac{U^2}{2g} + \left[\frac{fL}{D} + \Sigma K \right] \frac{U^2}{2g} \\
 z_o - \left[z_i + \frac{P_i}{\gamma} \right] &= \left[\frac{fL}{D} + \Sigma K + 1 \right] \frac{U^2}{2g}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

La integración de la energía cinética al término de pérdidas tiene ventajas que se entenderán mejor cuando se resuelvan problemas más complejos. Por lo pronto véase que la velocidad media aparece en un solo término y esto significa que cuando el gasto o la propia velocidad sean la incógnita del problema, será fácil hacer el despeje desde una ecuación como la 4.5 o la 4.6.

Problema resuelto 4.2: Un tubo de PVC que conduce agua a 10 °C posee los siguientes accesorios (Figura 4.2): Una entrada de aristas vivas, una válvula de globo abierta, un codo regular y un accesorio T cuyas tres vías tienen el mismo diámetro. Al llegar a la T el gasto se desvía por el tubo lateral. Calcular la pérdida para los siguientes casos:

- El diámetro del tubo es de 150 mm y su longitud de 200 m .
- El diámetro es de 150 mm y la longitud de 2000 m.
- El diámetro es de 75 mm y la longitud de 20 m.

Solución:

- La velocidad media de flujo es:

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.03}{\pi \times 0.15^2} = 1.70 \text{ m/s}$$

Para el cálculo del número de Reynolds se considera la viscosidad del agua a 10 °C que es de $1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{1.7 \times 0.15}{1.3 \times 10^{-6}} = 196,000$$

La rugosidad absoluta del PVC es 0.025 mm; entonces la rugosidad relativa es:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.025 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} = 0.000167$$

Con estos parámetros se obtiene del diagrama de Moody el factor de fricción

$$f = 0.0170$$

Los coeficientes K de los accesorios son:

- Para la entrada $K_{ent.} = 0.5$.
- Para una válvula de globo totalmente abierta de 150 mm, de la tabla 3.6 resulta, interpolando, $K_{v.g.a.} = 5.9$.
- En tubos de PVC las uniones son por lo general de macho y campana; se tomará por similitud el coeficiente K correspondiente a un codo roscado regular de 90° de 150 mm $K_{co.} = 0.6$ (figura 3.42.)
- Un accesorio T en el cual el gasto se deriva totalmente por el tubo lateral posee, según la figura 3.23, un coeficiente $K_T = 1$.

La suma de coeficientes K es:

$$\Sigma K = K_{ent.} + K_{v.g.a.} + K_{co.} + K_T = 0.5 + 5.9 + 0.6 + 1 = 8$$

Aplicando la fórmula 4.3 se obtiene finalmente la pérdida total

$$H_f = \left[\frac{fL}{D} + \Sigma K \right] \frac{U^2}{2g} = \left[\frac{0.017 \times 200}{0.15} + 8 \right] \frac{1.7^2}{19.6} = 3.34 + 1.18 = 4.52m$$

b) La única diferencia con el inciso a) es que la longitud del tubo es mayor, entonces:

$$H_f = \left[\frac{0.017 \times 2,000}{0.15} + 8 \right] \frac{1.7^2}{19.6} = 33.42 + 1.18 = 34.6 m$$

c) La velocidad media de flujo es:

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.03}{\pi \times 0.075^2} = 6.80 m/s$$

$$\text{el número de Reynolds } Re = \frac{6.8 \times 0.075}{1.3 \times 10^{-6}} = 392,000$$

$$\text{la rugosidad relativa } \frac{\epsilon}{D} = \frac{0.025 mm}{75 mm} = 0.00033$$

el factor de fricción $f = 0.0168$
(del diagrama de Moody)

De los coeficientes K de los accesorios, los únicos que cambian según las figuras y tablas respectivas, son el de la válvula de globo y el del codo

$$- K_{v.g.a.} = 7.2$$

$$- K_{co.} = 0.8$$

$$\text{entonces } \Sigma K = 0.5 + 7.2 + 0.8 + 1 = 9.5$$

Aplicando la fórmula de pérdidas:

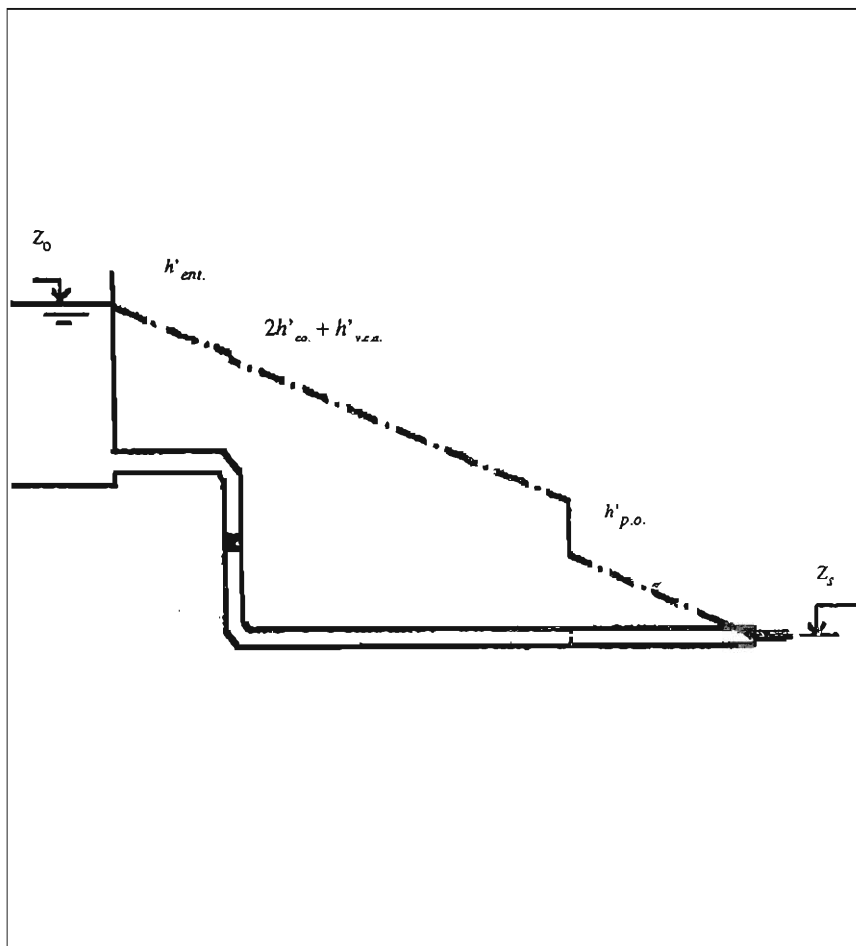


Figura 4.3: Problema resuelto 4.3, el trazo de raya y punto representa la línea de energía, que en este caso coincide prácticamente con la piezométrica.

$$H_f = \left[\frac{0.0168 \times 20}{0.075} + 9.5 \right] \frac{6.8^2}{19.6} = 10.57 + 22.41 = 32.98 \approx 33m$$

Problema resuelto 4.3: Trazar a escala el diagrama de energía del problema resuelto 4.1.

Solución: En la figura 4.3 se presenta el diagrama de energía que pide este problema. Los términos de energía incluyendo las pérdidas están en escala, no así las distancias horizontales que no se tienen como dato; además se supuso que el tramo vertical es de corta longitud. Puede observarse que las líneas de

energía piezométrica prácticamente coinciden y que con excepción de la placa-orificio las pérdidas secundarias no se distinguen en la gráfica.

4.2 Importancia relativa de las pérdidas secundarias

Los problemas que acaban de resolverse pueden servir de pauta para apreciar la influencia de las pérdidas secundarias sobre el total y en consecuencia formar criterio para decidir en qué casos realmente vale la pena tenerlas en cuenta.

En el inciso a) del segundo problema las pérdidas secundarias representan el 26% del total y por lo tanto son del mismo orden de magnitud que la primarias y es necesario computarlas. En el inciso b) en cambio, apenas representan el 3.4%; el resultado no cambia mucho si no se las tiene en cuenta. En el inciso c) contribuyen con casi el 70%, o sea la mayor parte, por lo cual es imprescindible considerarlas. En cuanto al problema 4.1, la incidencia de las pérdidas secundarias es del 16% de las totales.

Como se puede apreciar en los ejemplos vistos, la longitud de la tubería tiene una importancia decisiva pero también la tiene la cantidad y tipo de accesorios. En el problema 4.1, por ejemplo, si se quita la placa orificio que consume una porción considerable de energía, las pérdidas secundarias se reducen a poco más de 1% del total. En el problema 4.2 la válvula de globo también representa una pérdida importante; si en su lugar hubiera una válvula de compuerta, las pérdidas secundarias resultarían de menos de la tercera parte de los valores obtenidos; pero si en cambio la válvula, ya sea de globo o de compuerta, estuviera cerrada en un 90 ó 95%, probablemente ocasionaría por sí sola la mayor parte de la pérdida total.

La figura 4.4 presenta un ejemplo clásico referente a este problema; se trata de una *instalación de bombeo* para servicio normal de agua. Normalmente el tubo que conduce el líquido de la cisterna a la bomba, llamado *tubo de succión*, es de poca longitud y, para una bomba de eje horizontal requiere al menos de una válvula de pie con coladera, un codo a 90° y con frecuencia una reducción gradual pues el diámetro del tubo suele ser menor que el de la brida de entrada de la bomba. Este sería un caso en el que las pérdidas secundarias son muy importantes y deben tenerse en cuenta. En cambio para el *tubo de descarga*, que es el que conduce el agua de la bomba al tanque elevado, pueden despreciarse las pérdidas por accesorios si éstos son pocos y la longitud de la conducción es de mil metros o más.

Estos comentarios y ejemplos son muy interesantes pero es aventurado proponer reglas fijas a partir de ellos. Sólo la experiencia del calculista podrá llevar a decidir si las pérdidas secundarias pueden despreciarse o acaso evaluarse pero sin extremar la precisión.

4.3 Longitudes equivalentes

El método de longitudes equivalentes es un recurso que simplifica el cálculo hidráulico de tubos a presión con accesorios, ya que, como se verá a continuación, permite computar las pérdidas secundarias como si fueran primarias, de manera que en lugar de aplicarse la ecuación 4.2, se emplea directamente la 2.11. Si el lector revisa los problemas que acaban de resolverse, podrá pensar que la rutina de cálculo que se empleó es bastante sencilla y no amerita simplificarse más; sin embargo, para problemas más complicados, como en casos de redes o sin ir tan lejos, para calcular el gasto en tubos sencillos, sí es conveniente echar mano del método que se explicará a continuación.

Sea un tubo como el de la figura 4.5.a, el cual posee una longitud L y un accesorio arbitrario cuyo coeficiente de pérdidas secundarias es K . El tubo de la parte b de la figura tiene el mismo diámetro y rugosidad que el primero y conduce el mismo gasto, pero a diferencia de aquél, carece de accesorios. Para que el tubo b produzca la misma pérdida total H_f que el tubo a , es necesario que sea un poco más largo,

de manera que su exceso de longitud genera una pérdida primaria igual a la secundaria de aquél. Si a dicha longitud adicional se le llama L_e entonces es correcta la siguiente fórmula:

$$h_a(\text{tubo } a) = \Delta h_f(\text{tubo } b)$$

o bien

$$K \frac{U^2}{2g} = f \frac{L_e}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (4.7)$$

Esto es: la pérdida secundaria provocada por el accesorio en el tubo a es igual a la primaria Δh_f generada por el exceso de longitud en el tubo b. En la práctica, si se tiene un tubo como el primero es posible imaginar otro como el segundo, en cuyo caso a L_e se le llama *longitud equivalente* del accesorio. Ordenando un poco lo dicho en estos párrafos, se propone la siguiente definición:

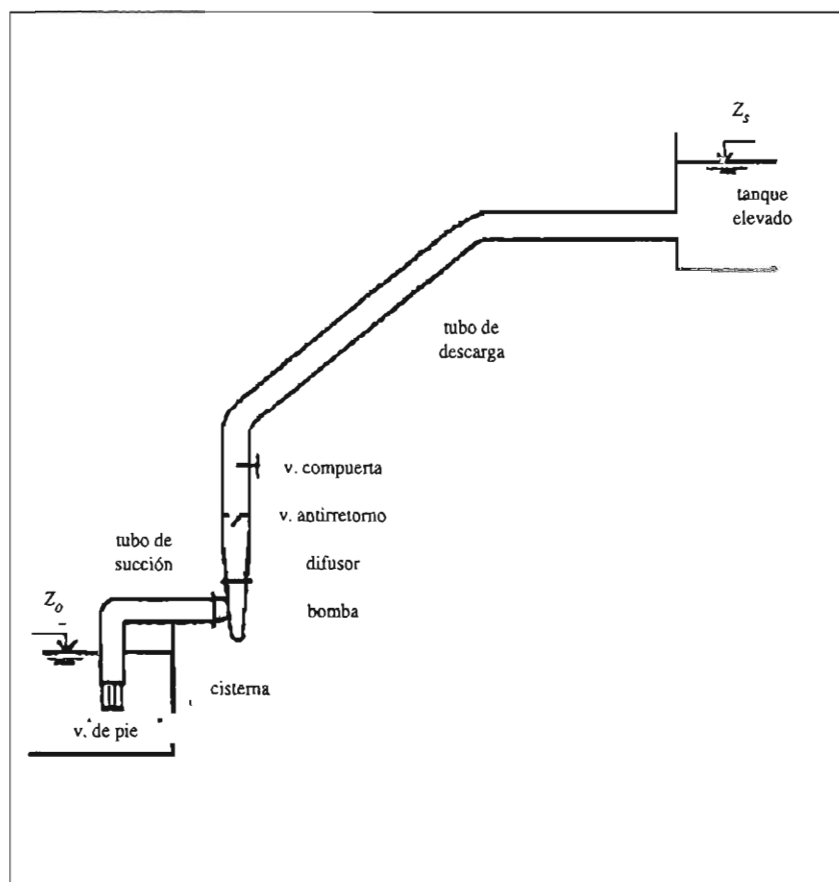


Figura 4.4: Esquema típico de una instalación de bombeo.

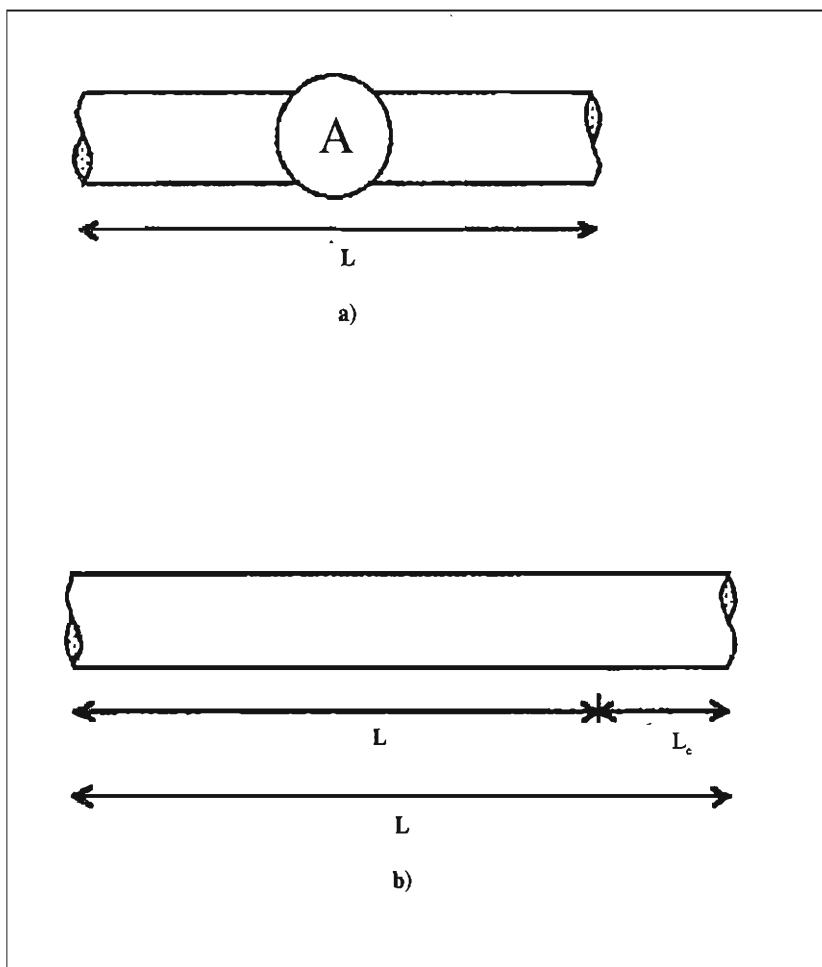


Figura 4.5: a) Tubo real con accesorio b) Tubo imaginario que posee la misma pérdida primaria que la total del anterior.

La longitud equivalente de un accesorio se define como la longitud de un tramo del mismo tubo que lo contiene y que conduciendo el mismo gasto genera una pérdida primaria igual a la secundaria de aquél.

Se llama *longitud de cálculo* L_c a la suma de la longitud real L de la tubería más la longitud equivalente L_e . Si el tramo en estudio tiene varios accesorios en lugar de poseer sólo uno, entonces la longitud de cálculo será igual a la real más la suma de las longitudes equivalentes de todos los accesorios

$$L_c = L + \Sigma L_e \quad (4.8)$$

Combinando esta ecuación con la 4.7 y la 1.25 (escrita al principio de este capítulo), resulta:

$$H_f = h_f + h_a = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} + \Sigma K \frac{U^2}{2g} = f \frac{L + \Sigma L_0}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (4.9)$$

finalmente
$$H_f = f \frac{L_c}{D} \frac{U^2}{2g}$$

Esta fórmula dice en definitiva que las pérdidas totales pueden calcularse como si se tratara sólo de pérdidas primarias, siempre que en la fórmula correspondiente se introduzca la longitud de cálculo en lugar de la longitud real del tubo.

El paso previo al empleo de la ecuación 4.9 es, por supuesto, la evaluación de las longitudes equivalentes de los accesorios. A partir de la fórmula 4.7 se puede deducir fácilmente que:

$$L_0 = \frac{KD}{f} \quad (4.10)$$

Como se aprecia, esta expresión que evalúa la longitud equivalente de un accesorio es muy sencilla pero obliga a obtener previamente el factor de fricción de la tubería; esto no constituye un problema serio pero le quita todo atractivo al método pues complica el procedimiento de cálculo. Una evaluación rigurosa del factor de fricción requiere el empleo del diagrama de Moody o de la fórmula de Coolebrook y White 2.33 que, como se recordará, no expresa a dicho factor en forma explícita.

Una forma de encontrar una solución adecuada a este problema sería la de usar alguna expresión explícita para la evaluación del factor de fricción, de las cuales se ha hablado en el capítulo 2. Una de las más sencillas es la fórmula de Altshul:

$$f = 0.11 \left(\frac{e}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{1/4} \quad (4.11)$$

Sin embargo el empleo de esta ecuación combinada con la 4.10 para evaluar la longitud equivalente puede resultar algo engorroso, sobre todo si la incógnita del problema es el gasto, en cuyo caso también se desconocen la velocidad media y por lo tanto el número de Reynolds. Con el fin de obtener una fórmula sencilla pueden hacerse dos simplificaciones alternativas: Una sería despreciar totalmente la influencia del número de Reynolds, como si la tubería fuera en todos los casos netamente rugosa. Otra, posibilidad, que es la que aquí se propone, es adoptar un valor para la velocidad que se encuentre dentro de los económicos recomendados para conducciones a presión, que como se verá más adelante en este mismo capítulo, oscilan entre 1 y 2 m/s. Se adoptará el mayor de estos valores por ser el más desfavorable y por lo tanto más seguro el cálculo. En cuanto a la viscosidad cinemática se tomará la del agua a temperatura ambiente, de 10^{-6} m²/s. Reemplazando estos valores en la ecuación 2.7 del número de Reynolds y luego en el (4.11), se obtiene:

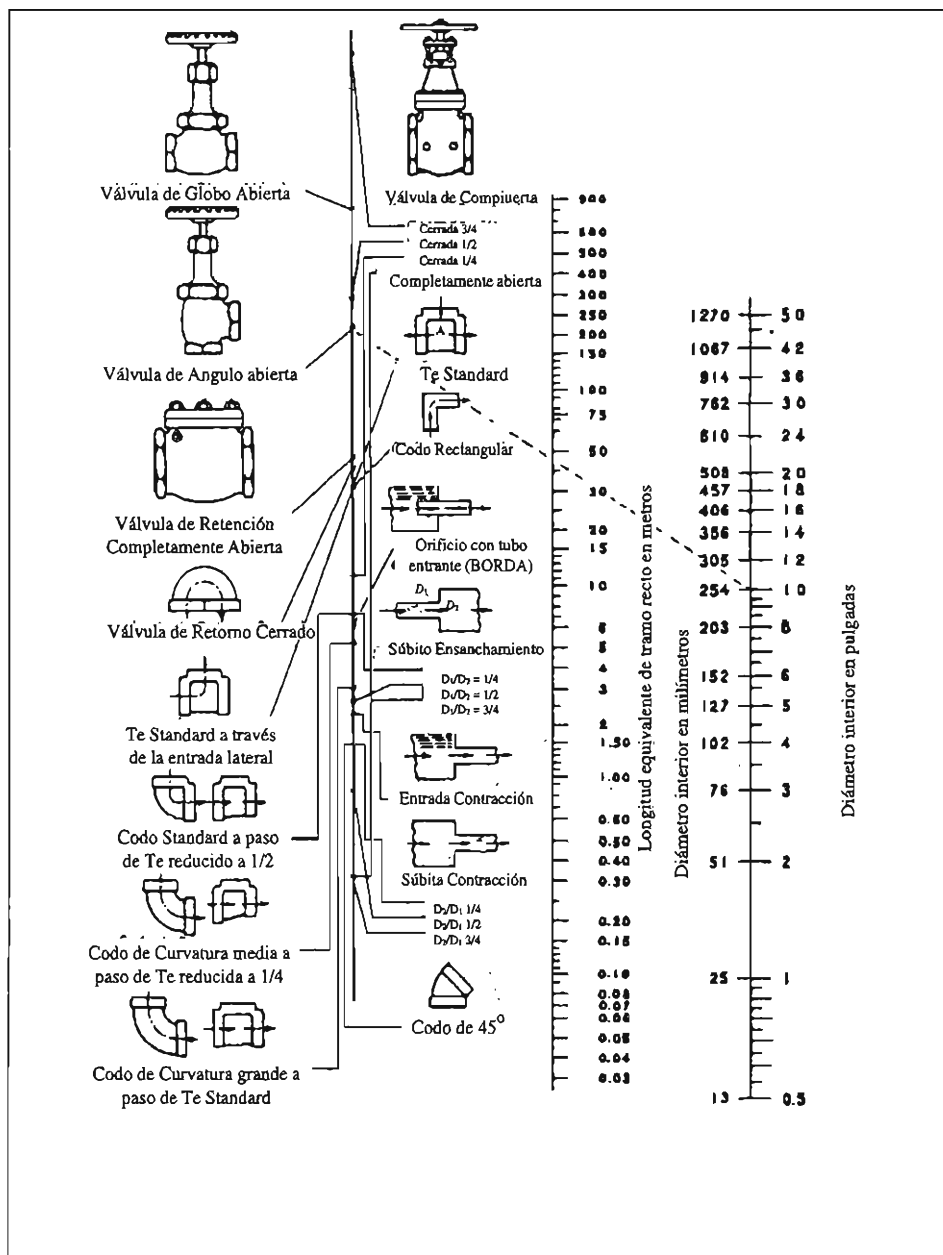


Figura 4.6: Nomograma para el cálculo de longitudes equivalentes.

$$f = 0.11 \left[\frac{\varepsilon}{D} + \frac{68 \times 10^{-6}}{2D} \right]^{1/4}$$

o bien

$$f = \frac{0.11}{D^{1/4}} [\varepsilon + 34 \times 10^{-6}]^{1/4}$$

si a su vez en ésta se reemplaza la 4.10 se obtiene:

$$L_{\theta} = \frac{9.1 K D^{1.25}}{[\varepsilon + 34 \times 10^{-6}]^{0.25}} \quad (4.12)$$

donde D , ε y L_{θ} se evalúan en metros, o bien la siguiente:

$$L_{\theta} = \frac{9.1 K D^{1.25}}{\left[\varepsilon + \frac{0.034}{1000} \right]^{0.25}} \quad (4.13)$$

que difiere de la anterior en que la L_{θ} y D siguen evaluándose en metros pero ε en milímetros, unidad empleada para esta variable en diversas tablas.

Las ecuaciones 4.12 ó 4.13 podrán emplearse para obtener longitudes equivalentes cuando se utilice la fórmula de Darcy-Weisbach en el cálculo hidráulico de la tubería. Si en cambio se emplea la ecuación de Hazen-Williams, que es muy popular para el cálculo de conducciones de agua de 2 pulgadas en adelante, convendrá evaluar las longitudes equivalentes por medio de otra expresión. De acuerdo a lo visto en el capítulo 2, la ecuación de Hazen-Williams para la pérdida primaria es la siguiente:

$$h_f = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \frac{Q^{1.85}}{D^{4.85}} L \quad (2.72)$$

Si en la ecuación 3.6, que evalúa el coeficiente K de un accesorio, se reemplaza la velocidad por su valor en función del gasto, se obtiene:

$$h_d h_f = K \frac{8}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{D^4} \quad (4.14)$$

Si en la ecuación de Hazen-Williams se toma para L la longitud equivalente del accesorio cuyo coeficiente es el K de la 4.10, será lícito igualar ambas fórmulas. Despejando L_{θ} de la igualdad resultante, y reemplazando $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ se obtiene:

$$L_{\theta} = 0.00774 K C_H^{1.85} D^{0.85} Q^{0.15} \quad (4.15)$$

Esta ecuación podrá emplearse para evaluar longitudes equivalentes cuando se conozca el gasto; las unidades a emplear son: L_θ y D en metros y Q en m^3/s . Sin embargo, si el gasto se desconoce o aun conociéndolo pero con el objeto de obtener una expresión sencilla, se tomará como en el caso precedente una velocidad media de 2 m/s. Reemplazando en la 4.15 el gasto Q por $2 \times \pi D^{2/4}$ se obtiene esta otra expresión:

$$L_\theta = 0.0083 K C_H^{1.85} D^{1.15}$$

o, lo que es lo mismo:

$$L_\theta = \frac{K C_H^{1.85} D^{1.15}}{120} \tag{4.16}$$

donde L_θ y D se evalúan en metros.

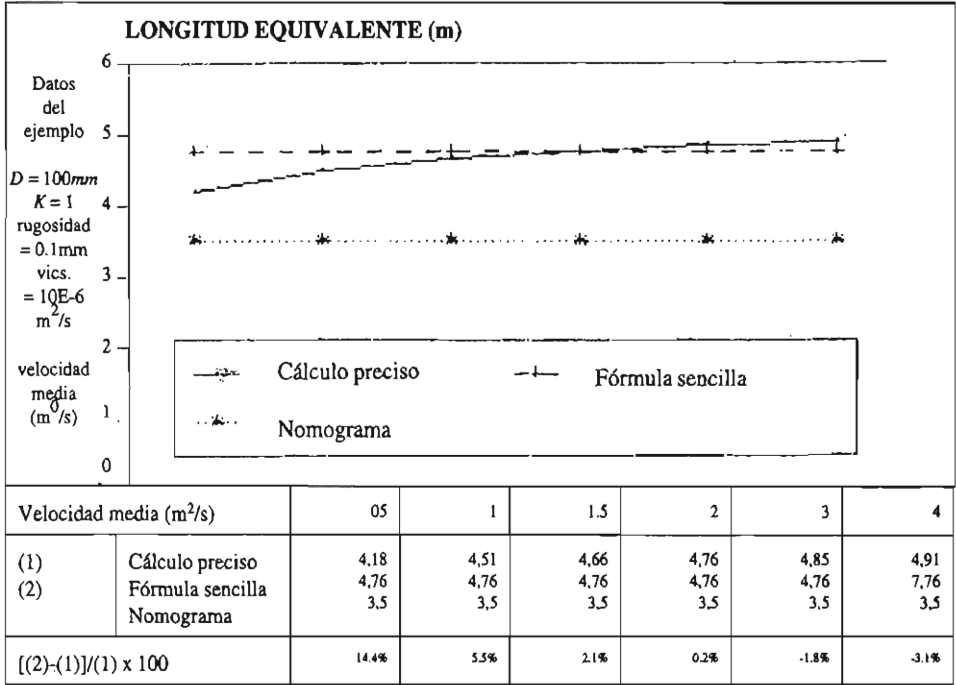


Figura 4.7 Cálculo de la longitud equivalente de un accesorio, empleando la ecuación de Darcy-Weissbach.

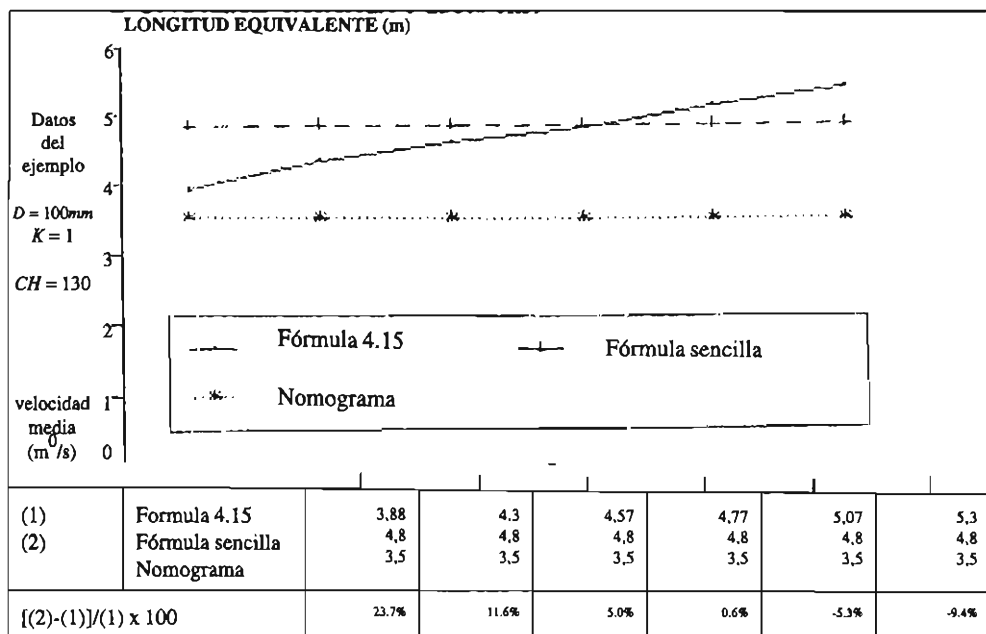


Figura 4.8: Cálculo de la longitud equivalente de un accesorio, empleando la fórmula de Hazen-Williams.

Podría parecerle al lector que las restricciones que se han hecho al proponer las fórmulas 4.12 y 4.16 son atrevidas a partir de que se propone una velocidad media y un líquido determinados. Sin embargo la realidad es que en la práctica las longitudes equivalentes se calculan en forma mucho más imprecisa. El nomograma de la figura 4.6, por ejemplo, es de uso muy difundido al punto de que se lo ve en numerosos manuales y folletos técnicos. La estructura y el empleo del mismo son bien sencillos: a la izquierda se observan varios accesorios a los cuales se les asigna una cierta posición en un eje vertical; en el eje del medio aparece la longitud equivalente y en el de la derecha el diámetro interno del tubo. El método de empleo consiste en:

- i) Ubicar la posición del accesorio en el eje izquierdo.
- ii) Ubicar el diámetro del tubo en el eje derecho y...
- iii) Unir ambos puntos con un segmento con lo que se obtiene la longitud equivalente en el eje central.

Otros ábacos y tablas empleados al efecto tienen similares características de uso y en general poseen en común la propiedad de que permiten obtener la longitud equivalente en función del tipo de accesorio y del diámetro pero tienen un defecto y es que no tienen en cuenta la rugosidad de la tubería. Los calculistas en general no le dan mayor importancia a este *detalle*, seguramente por el hecho de que las pérdidas secundarias tienen menor incidencia que las primarias sobre el total. Sin embargo, como se comentó en los problemas resueltos más arriba, se dan casos en que pérdidas primarias y secundarias son del mismo orden; en tales situaciones el empleo de ábacos para la obtención de las longitudes equivalentes puede

conducir a errores notables y más preocupante aún: del lado inseguro, es decir que la pérdida que se evaluará finalmente será menor que la real. El propio nomograma de la figura 4.6 es ejemplo que confirma esta crítica ya que el mismo data de algunas décadas atrás, cuando los materiales empleados para la conducción de agua eran principalmente ferrosos. En la actualidad se emplean con frecuencia materiales muy lisos para la conducción de líquidos como el asbesto-cemento o el PVC; cuya capacidad de descarga es entre un 20 y un 40% mayor que aquéllos. Si se analizan las fórmulas correspondientes se puede demostrar que esto puede conducir a errores de más del 50% por defecto en el cálculo de las pérdidas secundarias.

En la figura 4.7 se comparan los resultados de calcular longitudes equivalentes de diversas formas y para diferentes velocidades medias, de 0.5 a 4 m/s. El rotulado como *cálculo preciso* se hace con la fórmula 4.10, evaluando el factor de fricción f con la ecuación de Coolebrook y White; teóricamente es el camino más rigurosos. En el siguiente renglón se hace el cálculo por la ecuación 4.12. Al final se incluye una fila indicando el error que observa el segundo cálculo respecto del primero. En la figura 4.8 se hace lo propio con la ecuación de Hazen-Williams; primero con la fórmula 4.15, que tiene en cuenta la influencia de la velocidad media y luego con la fórmula simplificada 4.16. También en este caso se reporta el error en que se incurre al emplear la segunda fórmula respecto de la primera. En ambas figuras se incluye además el cálculo de la misma longitud equivalente empleando el nomograma de la figura 4.6.

Las figuras mostradas se refieren a un ejemplo específico (diámetro = 100 mm, rugosidad absoluta = 0.1 mm, coeficiente de Hazen-Williams = 130, líquido conducido: agua a temperatura ambiente, coeficiente K del accesorio = 1); sin embargo sirve para apreciar la tendencia general que se observa en los resultados. Puede verse que los errores resultan mayores para velocidades bajas, debido a que en la fórmula simplificada se supuso una velocidad más bien alta; pero estos errores son positivos, lo cual coloca el cálculo del lado de la seguridad; además lo más probable es que dichos errores no se alcancen en la realidad pues, como se ha visto al final del capítulo anterior, los coeficiente K disminuyen un poco conforme aumenta el número de Reynolds. Para velocidades elevadas el error es negativo; en el ejemplo no excede del 10%, lo cual es aceptable. En cambio el cálculo efectuado con el nomograma arroja una longitud equivalente de 3.5 m; efectivamente, un coeficiente K igual a la unidad podría corresponder aproximadamente a un ensanchamiento brusco con una relación de diámetros $D_1/D_2 = 1/4$; si se une el punto correspondiente a este accesorio en el eje izquierdo de la figura 4.6 con el de 4 pulgadas en el eje de la derecha, se obtiene en el eje del centro la longitud mencionada. Dicho valor es menor que el obtenido por cálculo preciso hasta en un 35%, pero si se tratara de un tubo más liso, como asbesto-cemento o PVC, para los cuales C_H vale 150, el error sería aún mayor en valor absoluto.

En conclusión, las fórmulas 4.12 y 4.16 pueden emplearse con confianza para evaluar las longitudes equivalentes de accesorios con una precisión aceptable. El nomograma de la figura 4.6 es muy práctico por el hecho de que permite conocer dichas longitudes sin molestarse siquiera en obtener previamente los valores de los coeficientes K pero debe tenerse en cuenta que arroja resultados groseros y a veces menores que los reales, por lo cual su uso es discutible si la importancia relativa de las pérdidas secundarias es considerable.

Problema resuelto 4.4: Resolver nuevamente el problema 4.2, inciso a) pero empleando la fórmula de Hazen-Williams y el método de longitudes equivalentes.

Solución: Según la tabla 2.5 el coeficiente de Hazen-Williams del PVC es $C_H = 140$, valor que se empleará para calcular la suma de las longitudes equivalentes de los accesorios por la fórmula 4.16; dado que la L_g de un accesorio es proporcional a su coeficiente K , también la sumatoria ΣL_g será proporcional a ΣK , entonces:

$$\Sigma L_0 = \frac{\Sigma K C_H^{1.85} D^{1.15}}{120}$$

El dato ΣK ya fue obtenido en la resolución del problema 4.2 y vale 8; reemplazando valores en la ecuación anterior resulta

$$\Sigma L_0 = \frac{8 \times 140^{1.85} \times 0.15^{1.15}}{120} = 70.3 \approx 70 \text{ m}$$

Según la fórmula 4.8 la longitud de cálculo es

$$L_c = L + \Sigma L_0 = 200 + 70 = 270 \text{ m}$$

con lo cual ya se puede aplicar la ecuación de Hazen-Williams en su expresión 2.72, claro que usando la pérdida total H_f en lugar de sólo la primaria h_f y la longitud de cálculo L_c en lugar de la real L .

$$H_f = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \frac{Q^{1.85}}{D^{4.85}} L_c = \frac{10.68}{140^{1.85}} \times \frac{0.03^{1.85}}{0.15^{4.85}} \times 270 = 4.66 \text{ m}$$

resultado que difiere en apenas un 3% del calculado con la fórmula de Darcy-Weisbach y el diagrama de Moody.

4.4 Cálculo del gasto en tubos con accesorios

Para calcular el gasto en un tubo con accesorios mediante el empleo del diagrama de Moody es preciso seguir un algoritmo similar al que se explicó en el apartado 2.5.1 para el caso de tubo sin accesorios. Como en aquel caso, desconocer el gasto significa desconocer la velocidad y por lo tanto el número de Reynolds, uno de los parámetros que se requieren para obtener el factor de fricción. El procedimiento es el siguiente:

- i) Se calcula la rugosidad relativa ϵ/D .
- ii) Se adopta un factor de fricción tentativo $f^{(1)}$, compatible con ϵ/D .
- iii) Se calcula una velocidad media tentativa $U^{(1)}$, despejándola de la ecuación 4.2.

$$U^{(1)} = \sqrt{\frac{2gH_f}{\left[\frac{f^{(1)}L}{D} + \Sigma K \right]}} \quad (4.17)$$

- iv) Se calcula un número de Reynolds, también tentativo:

$$Re^{(1)} = U^{(1)} D / \nu$$

v) Con $Re^{(1)}$ y $\%D$ se regresa al diagrama y se obtiene un nuevo factor de fricción $f^{(2)}$

Seguidamente se repiten los pasos iii), iv) y v) pero ahora con $f^{(2)}$ en lugar de $f^{(1)}$, hasta que dos factores de fricción sucesivos sean aproximadamente iguales, es decir:

$$f^{(n+1)} \cong f^{(n)}$$

Entonces se adoptará como verdadera la velocidad calculada en último término

$$U \cong U^{(n)}$$

... y finalmente se calcula el gasto con la ecuación de continuidad.

En este caso de tubo con accesorios no se puede calcular el gasto por métodos directos, como el que se propuso en el mismo apartado 2.5.1 y que incluye el cálculo de la cantidad $Re \sqrt{f}$. Esto se debe a que la fórmula 4.2 no es monómica.

El método de longitudes equivalentes simplifica notablemente el cálculo, sobre todo si se emplea la fórmula de Hazen-Williams. A continuación se resuelven dos problemas en los que se podrá apreciar esta afirmación.

Problema resuelto 4.5: Calcular el gasto de agua que transporta el tubo de PVC de 150 mm de diámetro y 100 m de longitud de la figura 4.9, el cual comunica los tanques T_o y T_s ($z_o = 42\text{m}$ y $z_s = 36.5\text{m}$); la entrada y la salida del tubo son de aristas vivas y en el trayecto hay dos codos normales de 90° y una válvula de compuerta abierta. Hacer el cálculo por tres caminos alternativos:

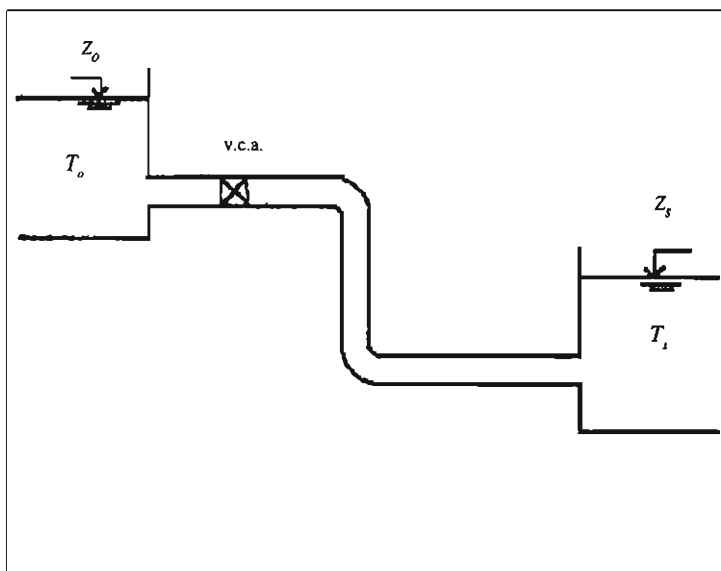


Figura 4.9: Problema resuelto 4.5.

- a) Empleando la fórmula de Darcy-Weisbach y el diagrama de Moody.
- b) Empleando la fórmula de Darcy-Weisbach y el método de longitudes equivalentes.
- c) Empleando la fórmula de Hazen-Williams y el método de longitudes equivalentes.

Solución: La pérdida H_f es igual a la diferencia de nivel entre ambos depósitos.

$$H_f = z_o - z_s = 42 - 36.5 = 5.5 \text{ m}$$

Para los tres incisos se requiere conocer los coeficientes K de los accesorios.

- Para la entrada de aristas vivas $K_{ent.} = 0.5$.
- Para un codo regular de 90° de 150 mm de diámetro $K_{co.} = 0.6$ (mismo valor adoptado en el problema resuelto 4.2 para un caso similar).
- Una válvula de compuerta abierta de 150 mm tiene un coeficiente $K_{v.c.a.} = 0.12$.
- Para la salida $K_{sal.} = 1$.

$$\Sigma K = K_{ent.} + 2K_{co.} + K_{v.c.a.} + K_{sal.} =$$

$$0.5 + 2 \times 0.6 + .12 + 1 = 2.82$$

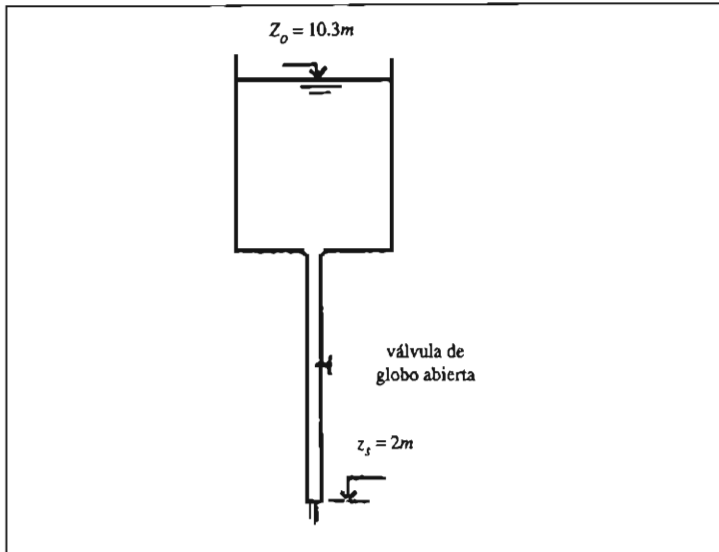


Figura 4.10: Problema resuelto 4.6.

a) Se seguirán los pasos del algoritmo propuesto en este apartado.

i) Se calcula ε/D , siendo para este caso $\varepsilon = 0.025 \text{ mm}$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.025}{150} = 0.000167$$

ii) Se adopta un factor de fricción $f^{(1)}$ compatible

$$f^{(1)} = 0.15$$

iii) Se calcula la velocidad media $U^{(1)}$ por la fórmula 4.17

$$U^{(1)} = \sqrt{\frac{19.6 \times 5.5}{\frac{0.15 \times 100}{0.15} + 2.82}} = 2.9 \text{ m/s}$$

iv) Se calcula $Re^{(1)}$ tomando $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (agua a 20°C)

$$Re^{(1)} = \frac{2.9 \times 0.15}{10^{-6}} = 435,000$$

v) Se obtiene del diagrama de Moody $f^{(2)}$ en función de Re y ε/D

$$f^{(2)} = 0.0153$$

Si se hace una nueva aproximación se obtendrán sucesivamente

Una velocidad media $U^{(2)} = 2.88 \text{ m/s}$

y un factor de fricción $f^{(3)} = 0.0153$

por lo cual puede aceptarse como verdadera la velocidad calculada en último término.

$$U \cong U^{(1)} = 2.88 \text{ m/s}$$

y entonces el gasto será, por la ley de continuidad:

$$Q = U \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 0.15^2}{4} \times 2.88 = 0.0509 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) La suma de longitudes equivalentes se calcula con la ecuación 4.12 donde, al igual que en el problema 4.4, se considera que así como L_0 es proporcional a K , también ΣL_0 es proporcional a ΣK

$$\Sigma L_0 = \frac{9.1 \Sigma K D^{1.25}}{[\varepsilon + 34 \times 10^{-6}]^{0.25}} = \frac{91 \times 2.82 \times 0.15^{1.25}}{(0.000025 + 0.000034)^{0.25}} = 27.3 \text{ m}$$

La longitud de cálculo es:

$$L_c = L + L_\theta = 100 + 27.3 = 127.3 \text{ m}$$

Para variar un poco respecto del inciso anterior se resolverá el cálculo del gasto por el método directo explicado en el apartado 2.5.1, cosa que ahora sí puede hacerse porque la fórmula para el cálculo de pérdidas 4.9 vuelve a ser monómica.

$$\text{Re } \sqrt{f} = \frac{D^{3/2}}{v} \sqrt{\frac{2 g H_f}{L_c}} =$$

$$\frac{0.15^{1.5}}{10^{-6}} \sqrt{\frac{10.6 \times 5.5}{127.3}} = 53,500$$

(Véase que esta ecuación, comparada con la 2.42, que es la referencia, difiere de el hecho de que se introduce H_f en lugar de h_f y L_c en lugar de L)

Aplicando ahora directamente la ecuación de Coolebrook y White

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log \left(\frac{2.52}{\text{Re } \sqrt{f}} + 0.269 \frac{\varepsilon}{D} \right) \\ -2 \log \left(\frac{2.52}{53,500} + 0.269 \times 0.000167 \right) &= 8.07 \end{aligned}$$

despejando:

$$f = \frac{1}{8.07^2} = 0.0153$$

A continuación se calcula la velocidad media despejándola de la ecuación de Darcy-Weisbach

$$U = \sqrt{\frac{2 g D H_f}{f L_c}} = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.15 \times 5.5}{0.0153 \times 127.3}} = 2.88 \text{ m/s}$$

mismo valor obtenido en la parte a) del problema por lo cual el gasto será idéntico a aquél, $Q = 0.0509 \text{ m}^3/\text{s}$

c) Se calcula ΣL_θ por la fórmula 4.16 tomando $C_H = 140$ (de la tabla 2.5)

$$\Sigma L_\theta = \frac{2.82 \times 140^{1.85} \times 0.15^{1.15}}{120} = 24.8 \text{ m}$$

La longitud de cálculo resulta entonces:

$$L_c = L + \Sigma L_\theta = 100 + 24.8 = 124.8 \text{ m}$$

y aplicando finalmente la fórmula de Hazen-Williams para el gasto:

$$Q = 0.278 C_H \left(\frac{H_f}{L_c} \right)^{0.541} D^{2.62} =$$

$$= 0.278 \times 140 \times \left(\frac{5.5}{124.8} \right)^{0.541} \times 0.15^{2.62} = 0.0499 \text{ m}^3/\text{s}$$

valor que difiere en menos de 2% del calculado en el inciso anterior.

Problema resuelto 4.6:

a) Calcular el gasto de agua que descarga el tubo de acero galvanizado de la figura 4.10, que sirve de drenaje al tanque T₀. El diámetro del tubo es de 25 mm, su longitud es de 10 m; la entrada es de aristas redondeadas con un radio de curvatura igual a la mitad del diámetro del tubo y la válvula V es de globo y está totalmente abierta.

b) ¿Cuánto valdrá el gasto en la misma conducción cuando la válvula está a medio cerrar?

Solución: Este problema no puede resolverse con la ecuación de Hazen-Williams por tratarse de un tubo de 25 mm, por lo tanto se usará la ecuación de Darcy-Weisbach y el método de longitudes equivalentes.

a) La rugosidad absoluta del acero galvanizado es de 0.15 mm (tabla 2.1). Los coeficientes de pérdida de los accesorios son:

– Para una entrada de aristas redondeadas el coeficiente K se obtiene de la figura 3.10.b; en este caso la relación r_{ad} es de 0.5; por ser este valor mayor que 0.2 se adopta $K_{ent. r} = 0.03$.

– Para una válvula de globo de 25 mm completamente abierta, el coeficiente, de la tabla 3.6, es $K_{v.g.a.} = 8.2$

De acuerdo a la figura la diferencia de nivel entre la superficie libre del tanque y la salida es:

$$z_0 - z_s = 8.3 \text{ m}$$

Tal como se ha procedido en otros problemas, este desnivel puede considerarse igual a la pérdida total H_f siempre que la energía cinética de salida se incluya en el término de pérdidas secundarias con un coeficiente igual a uno. Por lo tanto la suma de coeficiente K es:

$$\Sigma K = K_{ent. r} + K_{v.g.a.} + K_{sal.} = 0.03 + 8.2 + 1 = 9.23$$

La suma de longitudes equivalentes se calcula por la fórmula 4.12

$$\Sigma L_0 = \frac{9.1 \Sigma K D^{1.25}}{\left[\epsilon + 34 \times 10^{-6} \right]^{0.25}} = \frac{9.1 \times 9.23 \times 0.025^{1.25}}{(0.00015 + 0.000034)^{0.25}} = 7.17 \text{ m}$$

La longitud de cálculo es:

$$L_c = L + \Sigma L_0 = 10 + 7.17 = 17.17 \text{ m}$$

Se empleará el método directo para el cálculo del gasto

$$\begin{aligned}\text{Re}\sqrt{f} &= \frac{D}{\nu} \sqrt{\frac{2gH_f}{L_c}} = \\ &= \frac{0.025}{10^{-6}} \sqrt{\frac{19.6 \times 8.3}{17.17}} = 12,170\end{aligned}$$

Aplicando ahora directamente la ecuación de Coolebrook y White

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{f}} &= -2 \log \left[\frac{2.52}{\text{Re}\sqrt{f}} + 0.269 \frac{\epsilon}{D} \right] = \\ &-2 \log \left(\frac{2.52}{12,170} + 0.269 \times \frac{0.15}{25} \right) = 5.48\end{aligned}$$

despejando:

$$f = \frac{1}{5.48^2} = 0.0333$$

La velocidad media resulta

$$U = \sqrt{\frac{2gDH_f}{fL_c}} = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.025 \times 8.3}{0.0333 \times 17.17}} = 2.67 \text{ m/s}$$

Finalmente se calcula el gasto

$$Q = U \frac{\pi D^2}{4} = 2.67 \times \frac{\pi \times 0.025^2}{4} = 0.00131 \text{ m}^3/\text{s} = 1.31 \text{ l/s}$$

El número de Reynolds es igual a 68,000; efectivamente el flujo es turbulento.

b) Si la válvula de globo se cierra parcialmente, lo único que cambia en la resolución del problema es el valor de su coeficiente K ; combinando ambas partes de la tabla 3.6 resulta:

$$K_{v,g(50\%c.)} = 2.5 \times 8.2 = 20.5$$

Por lo demás el procedimiento es similar, de manera que sólo se hará una síntesis de los cálculos

$$\Sigma K = 0.03 + 20.5 + 1 = 21.5$$

$$\Sigma L_\theta = \frac{9.1 \times 21.5 \times 0.025^{1.25}}{(0.00015 + 0.000034)^{0.25}}$$

$$L_c = L + \Sigma L_\theta = 10 + 16.9 = 26.9 \text{ m}$$

$$\text{Re}\sqrt{f} = \frac{0.025^{1.5}}{10^{-6}} \sqrt{\frac{19.6 \times 8.3}{26.9}} = 9.720$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.52}{9.720} + 0.269 \times \frac{0.15}{25} \right) = 5.46$$

de donde: $f = 0.0336$

La velocidad media es:

$$U = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.025 \times 8.3}{0.0336 \times 26.9}} = 2.12 \text{ m/s}$$

y el gasto:

$$Q = 2.2 \times \frac{\pi \times 0.025^2}{4} = 0.00104 \text{ m}^3/\text{s} = 1.04 \text{ V/s}$$

4.5 Conducciones con bombas y turbinas

Se define como *máquina hidráulica* a todo dispositivo capaz de transformar energía hidráulica. Para lo que interesa al tema en cuestión, existen dos tipos de máquinas: *las bombas*, que entregan energía a la corriente líquida y *las turbinas hidráulicas*, que aprovechan la energía de la corriente para transformarla en energía mecánica de un sólido de revolución y en la mayoría de los casos, ésta se transforma a su vez en energía eléctrica. En el capítulo 1 ya se presentaron algunos casos de conducciones con bombas. Aquí se verán ejemplos similares pero ahora se los resolverá numéricamente en su totalidad. No siendo este un texto sobre máquinas hidráulicas, sólo se introducirán dos fórmulas, una de las cuales ya se empleó en el problema resuelto 1.5.

La potencia requerida para accionar una *bomba* responde a la siguiente ecuación:

$$N_f = \frac{\gamma Q H_m}{\eta} \quad (4.18)$$

donde N_f se llama potencia de accionamiento

γ es el peso específico del líquido

H_m es la carga de la *bomba*, esto es la energía neta por unidad de peso que la corriente líquida recibe de ella.

η es la eficiencia de la bomba

El producto $\gamma Q H_m$ es la potencia útil N_u y es otra forma de expresar la energía neta que recibe el líquido; la eficiencia η por lo tanto, mide la fracción de la potencia de accionamiento que se transforma en útil.

En el caso de la *turbina*, se llama potencia efectiva N_e a la que efectivamente la máquina entrega en forma de energía mecánica

$$N_e = \eta \gamma Q H_u \quad (4.19)$$

En esta fórmula η , γ y Q tienen el significados análogos a la ecuación anterior y H_u es la *carga útil*, o sea la energía hidráulica que consume la turbina.

Es lógico que en la fórmula 4.18 la eficiencia se encuentre dividiendo y en la 4.19 multiplicando, porque esto depende del sentido de transformación de la energía, de mecánica a hidráulica en el primer caso y a la inversa en el segundo. Las cantidades H_m y H_u corresponden al término H_i de la ecuación de la energía 1.24 pero con el siguiente matiz: para la bomba es $H_i = H_m$ y para la turbina $H_i = -H_u$ pues dicho término es positivo cuando se trata de energía entregada a la corriente líquida y negativo en el caso opuesto. De manera que las ecuaciones respectivas resultan:

$$\left[z^1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right] - \left[z^2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right] = H_f - H_m \quad (4.20)$$

(bomba)

$$\left[z^1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right] - \left[z^2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right] = H_f + H_u \quad (4.21)$$

(turbina)

A continuación se resuelven dos problemas

Problema resuelto 4.7: Calcular la potencia de accionamiento que requiere la bomba de la figura 4.4 suponiendo que el nivel de la superficie libre de la cisterna es $z_o = 28$ m y la del tanque elevado $z_s = 66$ m. El tubo es de acero galvanizado de 150 mm de diámetro; la longitud total es de 1180 m. Los accesorios son en la succión: una válvula de pie (de obturador oscilante) con coladera, un codo de radio largo de 90° y una reducción gradual con un ángulo central de 10° para empalmar con la brida de succión, de 100 mm de diámetro. En la descarga hay un difusor con un ángulo de apertura de 5° que comunica la brida de descarga, de 75 mm con el tubo; a continuación hay una válvula de compuerta abierta, una válvula antirretorno, dos codos normales de 45° y la salida. El gasto es de 40 l/s y la eficiencia de la bomba del 69%

Solución: Aplicando la ecuación de la energía en su forma 4.20 entre la cisterna y el depósito elevado, resulta

$$z_o - z_s = H_f - H_m$$

Se despeja la carga de la bomba

$$H_m = z_s - z_o + H_f \quad (4.22)$$

En algunos libros se llama *carga estática* a la diferencia $H_0 = Z_s - Z_o$ y *carga dinámica* a la pérdida H_f . Esta nomenclatura es lógica pues la primera es independiente de la velocidad mientras que la segunda depende fuertemente de dicha variable. En este ejemplo no es necesario calcular por separado las pérdidas en la succión y en la descarga porque ambos tubos pueden considerarse uno solo por ser idénticas sus características físicas. La velocidad media es

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.04}{\pi \times 0.15^2} = 2.26 \text{ m/s}$$

$$\text{El número de Reynolds } Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{2.26 \times 0.15}{10^{-6}} = 339,000$$

La rugosidad del acero galvanizado es $\epsilon = 0.15 \text{ mm}$, por lo tanto la rugosidad relativa es

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.15}{150} = 0.001$$

Del diagrama de Moody se obtiene $f = 0.0205$

Los coeficientes K de los accesorios son:

– válvula de pie con coladera: $K_{v.pie} = 1.12$ (Tabla 3.10)

– codo de radio largo: $K_{co.} = 0.2$ (Figura 3.12)

– reducción gradual: $K_{r.g.} = 0.05$ (Figura 3.10)

– difusor: $K_{dif.} = 0.13 \left[\left(\frac{0.15}{0.075} \right)^2 - 1 \right] = 1.17$ (Figura 3.7 y fórmula 3.24)

– válvula de compuerta: $K_{v.c.a.} = 0.11$ (Tabla 3.5)

– válvula antirretorno: $K_{v.ar.} = 0.75$ (Tabla 3.10)

– codo normal a 45° : $K_{co.} = 0.26$ (Figura 3.12)

– salida: $K_{sal.} = 1$

$$\Sigma K = 1.12 + 0.2 + 0.05 + 1.17 + 0.11 + 0.75 + 2 \times 0.26 + 1 = 4.92$$

Reemplazando en la ecuación 4.2

$$H_f = \left(\frac{fL}{D} + \Sigma K \right) \frac{U^2}{2g} = \left(\frac{0.0205 \times 1180}{0.15} + 4.92 \right) \times \frac{2.26^2}{19.6} = 43.3$$

Reemplazando en la 4.22

$$H_m = 66 - 28 + 43.3 = 81.3 \text{ m}$$

Para calcular la potencia de accionamiento se emplea la fórmula 4.18

$$N_f = \frac{\gamma Q H_m}{\eta} = \frac{9.80 \times 0.04 \times 81.3}{0.69} = 46,200 \text{ W} = 46.2 \text{ kW} = 62.8 \text{ HP}$$

Problema resuelto 4.8: La figura 4.11 representa un aprovechamiento hidroeléctrico cuyas dimensiones se indican. El gasto es de $6 \text{ m}^3/\text{s}$, el tubo es de acero soldado de 2.1 m de diámetro y la eficiencia de la turbina del 83%. Calcular la carga útil y la potencia efectiva de la máquina. Las pérdidas secundarias pueden despreciarse debido a la longitud de la tubería y al diseño cuidadoso de los accesorios. También se despreciarán las pérdidas en el desfogue por ser un tramo corto y de grandes dimensiones transversales.

Solución: Aplicando la ecuación 4.21 entre el vaso y el canal de fuga resulta

$$z_o = z_s = H_f + H_u$$

de donde se despeja

$$H_u = z_o - z_s - H_f$$

La velocidad media es

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 9}{\pi \times 2.1^2} = 2.6 \text{ m/s}$$

El número de Reynolds

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{2.6 \times 2.1}{10^{-6}} = 5,460,000$$

Se toma para el acero soldado una rugosidad $\epsilon = 0.15 \text{ mm}$; por lo tanto la rugosidad relativa es

$$\frac{0.15 \text{ mm}}{2,100 \text{ mm}} = 7.1 \times 10^{-5}$$

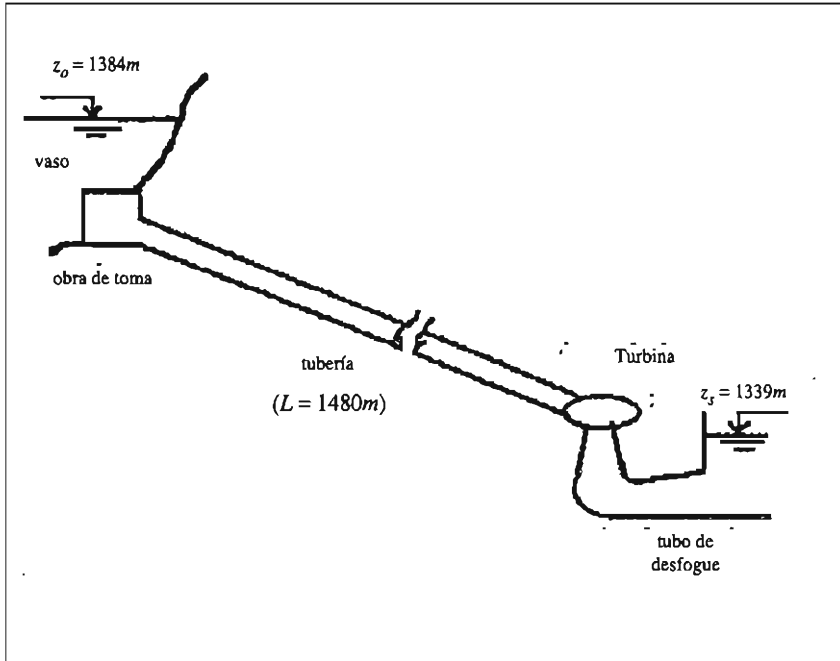


Figura 4.11: Problema resuelto 4.8.

Del diagrama de Moody se obtiene $f = 0.0117$

Reemplazando en la ecuación de Darcy-Weisbach

$$H_f = \frac{fL}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{0.0117 \times 1480}{2.1} \frac{2.6^2}{19.6} = 2.84m$$

Reemplazando en la fórmula de H_u

$$H_u = 1,384 - 1,339 + 2.84 = 47.84$$

Finalmente, con la 4.19

$$N_0 = \eta \gamma Q H_u = 0.83 \times 9,800 \times 9 \times 47.84 = 3.5 \times 10^6 \text{ W} = 3,500 \text{ kW}$$

4.6 Gasto en ruta

En este apartado se obtendrá una fórmula que permite calcular con buen grado de aproximación la pérdida en un tubo como el de la figura 4.12, el cual recibe un *gasto de entrada* Q_E en su extremo de aguas arriba pero descarga un gasto menor Q_S , llamado *gasto de salida*. La diferencia se pierde a lo largo de la conducción mediante derivaciones laterales o fugas con una tasa uniforme; este gasto se denomina *gasto en ruta* Q_R y el cociente

$$q_R = \frac{Q_R}{L} \quad (4.23)$$

...es el *gasto en ruta* por unidad de longitud. Por lo tanto puede escribirse la siguiente expresión:

$$Q_S = Q_E - Q_R = Q_E - q_R L \quad (4.24)$$

A una distancia l del extremo superior el gasto vale:

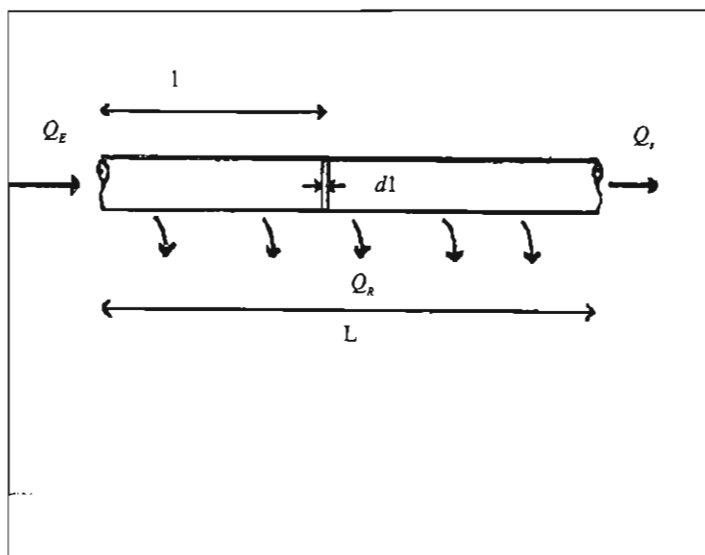


Figura 4.12: Gasto en ruta.

$$Q_1 = Q_E - q_R L \quad (4.25)$$

En el capítulo 2 se definió la pérdida unitaria de energía $S_f = h_f/L$. A partir de la fórmula de Darcy-Weisbach (2.43) se puede obtener

$$S_f = \frac{1}{L} \left[\frac{8f}{\pi^2 g} \frac{L}{D^5} Q^2 \right] = \frac{8f}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{D^5} \quad (4.26)$$

Llamando
$$k = \frac{8f}{\pi^2 g} \quad (4.27)$$

... y reemplazando la 4.25 en la 4.26, resulta

$$S_f = k \frac{(Q_E - q_R L)^2}{D^5}$$

La pérdida S_f es variable a lo largo del tubo, pero es constante a lo largo de un pequeño segmento de longitud dt

$$S_f dt = k \frac{(Q_E - q_R L)^2}{D^5} dt$$

Integrando entre 0 y L se obtiene la pérdida total a lo largo de este tubo en el que el gasto es variable

$$h_f = \int_0^L S_f dt = \int_0^L k \frac{(Q_E - q_R L)^2}{D^5} dt$$

Si bien el factor de fricción f es variable, puesto que lo es también el número de Reynolds, se lo supondrá aproximadamente constante, por lo tanto

$$\begin{aligned} h_f &= \frac{k}{D^5} \int_0^L (Q_E - q_R L)^2 dt = \\ &= \frac{K}{D^5} \int_0^L (Q_E^2 - 2 Q_E q_R L + q_R^2 L^2) dt \\ h_f &= \frac{k}{D^5} \left[Q_E^2 L - 2 Q_E q_R L^2 + \frac{q_R^2 L^3}{3} \right] \end{aligned}$$

Reemplazando en ésta la ecuación 4.24

$$h_f = \frac{k}{D^5} \left[(Q_s + q_R L)^2 L - (Q_s + q_R L) q_R L^2 + \frac{q_R^2 L^3}{3} \right]$$

$$h_f = \frac{k L}{D^5} \left[Q_s^2 + 2 Q_s q_R L + q_R^2 L^2 - Q_s q_R L - q_R^2 L^2 + \frac{q_R^2 L^2}{3} \right]$$

$$h_f = \frac{k L}{D^5} \left[Q_s^2 + Q_s q_R L + \frac{q_R^2 L^2}{3} \right]$$

Reemplazando $Q_R = q_R L$ (Ecuación 4.23)

$$h_f = \frac{k L}{D^5} \left[Q_s^2 + Q_s Q_R + \frac{Q_R^2}{3} \right] \quad (4.28)$$

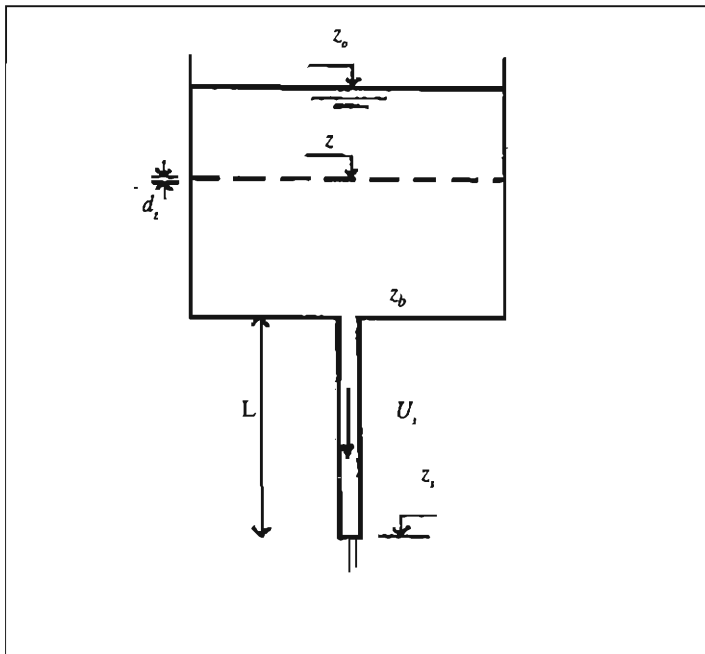


Figura 4.13: Drenado de tanques.

Ahora bien, analíscense las siguientes desigualdades:

$$\left(Q_s^2 + Q_s Q_R + Q_{f3}^2\right) > \left(Q_s^2 + Q_s Q_R + Q_{f4}^2\right) = \left(Q_s + 0.5 Q_R\right)^2$$

Efectivamente $1/\sqrt{3} \cong 0.58$. Los últimos miembros de estas dos ecuaciones no difieren mucho entre sí, de manera que si se adopta un valor

$$Q_c = Q_s + 0.55 Q_R \quad (4.29)$$

... al que se llama gasto de cálculo, el mismo no diferirá mucho de la cantidad entre paréntesis de la ecuación 4.28. Resumiendo: *La pérdida en un tubo con gasto en ruta se puede calcular aproximadamente como si se tratara de un tubo con gasto constante, para el cual se toma un valor igual al gasto de salida más el 55% del gasto en ruta.*

Un ejemplo práctico de conducción con gasto en ruta podría ser el de un tramo de tubo de abastecimiento de agua potable a lo largo de una calle. A continuación se resuelve un problema.

Problema resuelto 4.9: Calcular la pérdida en un tubo de PVC de 250 mm de diámetro y 650 m de longitud, el cual recibe en su extremo superior 125 m^3/s de agua; el 45% de este gasto se deriva uniformemente a lo largo de la conducción.

Solución: De acuerdo al enunciado los gastos de entrada, salidad y en ruta son, respectivamente:

$$Q_E = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_R = 0.45 Q_E = 0.056 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_S = Q_E - Q_R = 0.069 \text{ m}^3/\text{s}$$

Aplicando la fórmula 4.28 para obtener el gasto de cálculo:

$$Q_c = Q_s + 0.55 Q_R = 0.069 + 0.55 \times 0.056 = 0.0998 \cong 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{La velocidad media es } U_c = \frac{4 Q_c}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.1}{\pi \times 0.25^2} = 2.04 \text{ m/s}$$

A partir de aquí se resuelve como tubo sencillo

$$\text{Re} = \frac{2.04 \times 0.25}{10^{-6}} = 510,000$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.025}{250} = 10^{-4}$$

Del diagrama de Moody se obtiene el factor de fricción

$$f = 0.0145$$

... y la pérdida es

$$h_f = \frac{0.0145 \times 650}{0.25} \times \frac{2.04^2}{19.6} = 8m$$

4.7 Flujo no permanente

La ecuación de la energía no es aplicable al flujo no permanente en la forma en que se la ha venido utilizando. Sin embargo si se trata de un flujo gradualmente impermanente sí es posible hacerlo. Un ejemplo clásico de este tipo de flujo es el drenado de un tanque, caso que se ilustra en la figura 4.13; conforme se vacía el tanque descende el nivel de su superficie libre y esto a su vez influye sobre la corriente. Por contraste la propagación de una onda de choque es un caso de flujo bruscamente impermanente.

Cuando la superficie libre del tanque alcanza la posición genérica z , la ecuación de la energía adquiere la siguiente forma:

$$z - \left(z_s + \frac{U_s^2}{2g} \right) = H_f = \left(\frac{fL}{D} + \Sigma K \right) \frac{U_s^2}{2g}$$

La energía cinética en z no se considera porque a pesar de que el líquido en el tanque está descendiendo, lo hace a una velocidad U_d muy baja; de la anterior puede despejarse...

$$z - z_s = \left(\frac{fL}{D} + \Sigma K + i \right) \frac{U_s^2}{2g}$$

y de está puede obtenerse la velocidad media

$$U_s = \sqrt{\frac{2g(z - z_s)}{fL/D + \Sigma K + 1}} \quad (4.31)$$

Aplicando la ley de continuidad puede demostrarse fácilmente que

$$U_s A_s = U_d A_d$$

donde A_s es la sección del tubo y A_d la del tanque; despejando U_d de ésta y combinando con la anterior resulta

$$U_d = \frac{A_s}{A_d} \sqrt{\frac{2g(z - z_s)}{fL/d + \Sigma K + 1}}$$

Pero a su vez U_d , la velocidad de descenso en el tanque, puede expresarse como

$$U_d = -\frac{dz}{dt}$$

El signo menos se debe a que z disminuye conforme aumenta t . Reemplazando en la anterior se obtiene la siguiente ecuación diferencial. Para simplificar la resolución *se admitirá que $z_s = 0$* ya que el nivel de referencia es arbitrario

$$dt = -\frac{dz}{\frac{A_d}{A_s} \sqrt{\frac{2gz}{fL_d + \Sigma K + 1}}}$$

La integración es sencilla si se asume que el factor de fricción f no varía o varía muy poco con la velocidad; los límites de integración son, para la variable z : z_o , el nivel del tanque al principio del drenado y z ; para el tiempo: 0 y t . De esta manera se puede calcular el tiempo necesario para que el tanque se vacíe hasta un nivel genérico

$$\int_0^t dt = -\frac{A_d}{A_s} \sqrt{\frac{fL_d + \Sigma K + 1}{2g}} \int_{z_o}^z \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Efectuando la integración resulta

$$t = -\frac{A_d}{A_s} \sqrt{\frac{fL_d + \Sigma K + 1}{2g}} 2 (\sqrt{z} - \sqrt{z_o})$$

Reordenando un poco

$$t = \frac{2A_d}{A_s} \sqrt{\frac{fL_d + \Sigma K + 1}{2g}} (\sqrt{z_o} - \sqrt{z}) \quad (4.32)$$

A continuación se resolverá un problema para completar la idea.

Problema resuelto 4.10: Calcular el tiempo total de drenado del tanque de la figura 4.13 suponiendo que el tanque es rectangular de 60 x 40 cm, la altura de agua dentro del mismo es $z_o - z_b = 55$ cm y que el tubo es vertical, de cobre, de 1/2 pulgada de diámetro interior y su longitud es de 75 cm; el líquido es agua a temperatura ambiente.

Solución: Antes de aplicar la fórmula 4.32 deben calcularse algunas de las variables que intervienen en ella

- El área del tubo es $A_s = \pi \frac{D^2}{4} = \pi \frac{0.0127^2}{4} = 0.0001267 \text{ m}^2$
- El área del tanque $A_d = 0.60 \times 0.40 = 0.24 \text{ m}^2$
- El nivel z_b es igual a la longitud del tubo pues la posición de éste es vertical $z_b = 0.75 \text{ m}$
- El nivel z_o es $z_o = 0.75 + 0.55 = 1.30 \text{ m}$
- El único accesorio en el tubo es la entrada, de manera que...

$$\Sigma K = 0.5$$

- Con respecto al coeficiente f , está claro que es variable; para asignarle un valor apropiado se empezará por calcular la rugosidad relativa, considerando que para el cobre es $\epsilon = 0.0015 \text{ mm}$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.0015}{12.7} = 0.00011$$

Se considerará un factor de fricción aproximado compatible con este parámetro

$$f(1) = 0.015$$

Este valor se reemplazará en la ecuación 4.31 y se obtendrán las velocidades U_s máxima y mínima; la primera corresponderá al comienzo del vaciado ($z = z_o = 1.30 \text{ m}$) y la segunda al final ($z = z_b = 0.75 \text{ m}$)

$$U_{s(max)} = \sqrt{\frac{19.6 \times 1.3}{0.015 \times 0.75 \times 0.0127 + 1.5}} = 3.27 \text{ m/s}$$

$$U_{s(min)} = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.75}{0.015 \times 0.75 \times 0.0127 + 1.5}} = 2.48 \text{ m/s}$$

El promedio de éstas es $U_{s(med)} = 1/2 (3.27 + 2.48) = 2.88 \text{ m/s}$

Con lo cual el número de Reynolds promedio es $Re = 36,600$

Con este número de Reynolds y la rugosidad relativa calculada más arriba se obtiene del diagrama de Moody el siguiente factor de fricción que es el que se adoptará en definitiva.

$$f = 0.228$$

Ahora sí se pueden reemplazar valores en la ecuación 4.32

$$t = \frac{2 \times 0.24}{0.0001267} \sqrt{\frac{0.0228 \times 0.75 \times 0.0127 + 1.5}{19.6}} (\sqrt{1.3} - \sqrt{0.75}) = 396$$

segundos ≈ 6 minutos y medio

4.8 Diámetro económico

Ya se ha dicho en algunas ocasiones a lo largo de este texto que existe un rango de velocidades considerado económico en las conducciones a presión; si se excede del mismo la pérdida aumenta considerablemente pues es una función cuadrática de la velocidad y si por el contrario se emplean velocidades muy bajas será necesario un diámetro muy grande y por lo tanto el costo de inversión de la instalación será muy elevado. Para toda conducción existe un diámetro óptimo que hace mínima la suma de los costos de inversión, operación y mantenimiento; tal es el concepto del diámetro económico de la tubería. La determinación de este diámetro se basa en el análisis de los costos, pero sólo de aquellos componentes que son sensibles al diámetro. Este análisis dependerá del tipo de conducción y de su utilidad económica; a continuación se verá el caso de una instalación de bombeo para servicio normal de agua y más brevemente el de una instalación hidroeléctrica y el de una red de distribución de agua potable.

En el problema resuelto 4.7 se vio un ejemplo adaptado a la instalación de bombeo de la figura 4.4; la carga de la bomba se calculó por la ecuación

$$H_m = (z_s - z_o) + H_f = H_\theta + H_f \quad (4.22)$$

donde a H_θ se le llama carga estática y a H_f carga dinámica. De acuerdo a la ecuación 4.18 la potencia de accionamiento es:

$$N_f = \frac{\gamma Q H_m}{\eta}$$

Además, la pérdida H_f puede evaluarse por la ecuación de Darcy-Weisbach

$$H_f = \frac{8 f L_c}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{D^5} = k_f \frac{Q^2 L_c}{D^5}$$

El coeficiente K_f simplemente se emplea a fin de escribir la ecuación en forma más compacta. Si se combinan estas tres últimas ecuaciones se obtiene:

$$N_f = \frac{\gamma Q}{\eta} \left(H_\theta + k_f \frac{Q^2 L_c}{D^5} \right)$$

Para obtener la energía de bombeo consumida en un año, esta potencia debe multiplicarse por $Nh = 8,760$, esto es la cantidad de horas que hay en un año (esto supone que el servicio de bombeo es continuo). Finalmente, para obtener el costo anual de bombeo Cab (\$/año), dicha energía se multiplica por el costo por kilovatio-hora Cub (\$/k Wh).

$$Cab = \frac{\gamma Q}{\eta} \left[H_\theta + k_f \frac{Q^2 L_c}{D^5} \right] Nh \quad Cub$$

Este costo es muy sensible al diámetro; obsérvese que en esta ecuación hay un término inversamente proporcional al diámetro a la quinta.

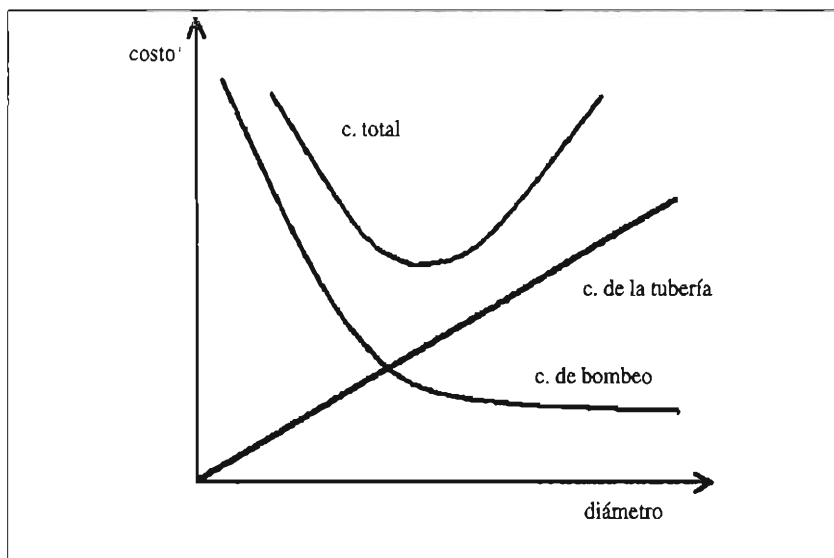


Figura 4.14: Diámetro económico

En cuanto al costo de la tubería, su cálculo es muy fácil ya que sólo debe multiplicarse el costo unitario del tubo Cut (\$/metro lineal) por la longitud real de la conducción. Es importante que dicho costo refleje no sólo el precio de venta del tubo sino también su puesta en obra.

$$Ct = Cut L$$

Ahora bien, véase que los costos Cab y Ct no son homogéneos, ya que el primero es un costo anual y el segundo es un costo de inversión; una forma de hacerlos comparables es multiplicar Ct por la anualidad A , que incluye el interés y la amortización del capital necesario para efectuar dicha inversión. Entonces el costo anualizado de la tubería será

$$Cat = Cut L A \quad (4.34)$$

Sumando las ecuaciones 4.33 y 4.34 se obtiene el *costo anual total* $Catt$

$$Catt = \frac{\gamma Q}{\eta} \left[H_0 + k_f \frac{Q^2 L_c}{D^5} \right] N h Cub + Cut L A \quad (4.35)$$

La figura 4.14 presenta en forma gráfica la variación de estos costos en función del diámetro; la suma de ambos arroja una tercera curva que es el costo anual total; el diámetro económico corresponde al vértice de dicha curva, es decir al costo total mínimo. Resolver la ecuación 4.35 para los distintos diámetros comerciales y adoptar el que arroje el valor mínimo es la forma más adecuada para encontrar el diámetro económico. Para ello se requiere conocer una serie de datos que van desde la características físicas de la instalación hasta los costos y la amortización. Sin embargo existen también fórmulas aproximadas que permiten resolver el problema de manera no tan precisa pero más sencilla. Una de ellas es la fórmula de Bresse, que se obtiene derivando la 4.35 respecto del diámetro. Para simplificar esta deducción se supondrá que el costo unitario de la tubería Cut es aproximadamente proporcional al diámetro:

$$Cut \approx cut D$$

Agrupando las variables de la ecuación 4.35 en coeficientes se puede escribir

$$Catt = a + b \frac{Q^2}{D^5} + c D$$

Derivando respecto del diámetro

$$\frac{Catt}{dD} = -5 b \frac{Q^2}{D^4} + c$$

Cuando esta derivada se convierte en cero, el valor de $Catt$ es mínimo y el diámetro será el económico, el cual se puede despejar

$$D_{ec} = \sqrt[4]{\frac{5b}{c}} \sqrt{Q}$$

$$D_{ec} = K_b \sqrt{Q} \quad (4.36)$$

que es la fórmula de Bresse.

Como puede apreciar el lector, el coeficiente b es proporcional al costo de bombeo y el c lo es al de la tubería, de manera que el valor de K_b refleja la importancia relativa de ambos. Este factor oscila normalmente entre 0.9, cuando predomina el costo de la tubería, y 1.5 en el caso puesto. Puede tomarse el promedio, es decir 1.2, para cálculo aproximados.

A veces el servicio de bombeo es intermitente, por ejemplo cuando las bombas trabajan 8 horas por día; en tal caso la cantidad Nh de la ecuación 4.35 será menor que 8,760. Esto se refleja en la fórmula de Bresse de la siguiente manera

$$D_{ec} = K_b \sqrt{\beta} \sqrt{Q} \quad (4.37)$$

donde β se llama factor de ocupación y es la fracción del día (o del año en su caso) en que trabaja la instalación; en el ejemplo mencionado de una bomba que trabaja 8 horas al día, β vale 0.33 (si la operación se extiende a todos los días del año).

El criterio de la velocidad económica también suele emplearse. Como ya se ha dicho en algunas ocasiones, esta oscila aproximadamente entre 1 y 2 m/s. Si se combinan la fórmula de Bresse con la ley de continuidad puede obtenerse la relación entre el coeficiente K_b y la velocidad media de flujo, que se sintetiza en la siguiente tabla:

$K_b = 0.9$	$U = 1.60 \text{ m/s}$
$K_b = 1.1$	$U = 1.06$
$K_b = 1.3$	$U = 0.75$
$K_b = 1.5$	$U = 0.57$

En el caso de *tubos a presión de plantas hidroeléctricas*, el diámetro también se dimensiona con criterio económico, sólo que en este caso las velocidades económicas son mayores, aproximadamente lo doble que en instalaciones de bombeo. La razón es que debe considerarse el precio de venta de la energía, que es inferior al de compra, empleado en la deducción anterior.

En *redes de distribución de agua* el problema es más difícil de resolver en forma precisa, debido a la complejidad que entraña una red, en la que no sólo hay una gran número de tubos de diversos tamaños, sino también elementos tales como depósitos elevados o superficiales, cuyo costo también debe entrar en el análisis. Por ello es que en este caso, con más razón que en los anteriores, el dimensionamiento del diámetro se hace mediante criterios empíricos. La velocidad económica es de 1 a m/s en tubos principales y de 0.5 a 0.7 m/s en tubos secundarios.

El diámetro económico se encuentra limitado en algunos casos por diámetros mínimos exigidos por diversas normas.

Resumen del capítulo

* Las herramientas vistas en los capítulos precedentes se combinan para el cálculo de las pérdidas en un tubo con accesorios; la fórmula general será

$$H_f = \left(\frac{fL}{D} + \Sigma K \right) \frac{U^2}{2g}$$

* Las pérdidas secundarias no siempre son despreciables frente a las primarias. Pueden serlo en el caso de tubos largos con pocos accesorios.

* El método de longitudes equivalentes es un recurso para calcular las pérdidas secundarias como si fueran primarias. La longitud equivalente de un accesorio puede determinarse en forma directa mediante el nomograma elaborado al efecto o en forma más precisa mediante fórmulas que tienen en cuenta el efecto de la rugosidad.

* En las conducciones que poseen bombas o turbinas, debe tenerse en cuenta la energía adicionada o tomada por la máquina en el cálculo hidráulico. La potencia de la máquina está relacionada con dicha carga a través de las fórmulas de potencia.

* Los tubos con gasto en ruta uniformemente distribuido pueden calcularse aproximadamente tomando un gasto de cálculo igual al de salida más el 55 % del gasto en ruta.

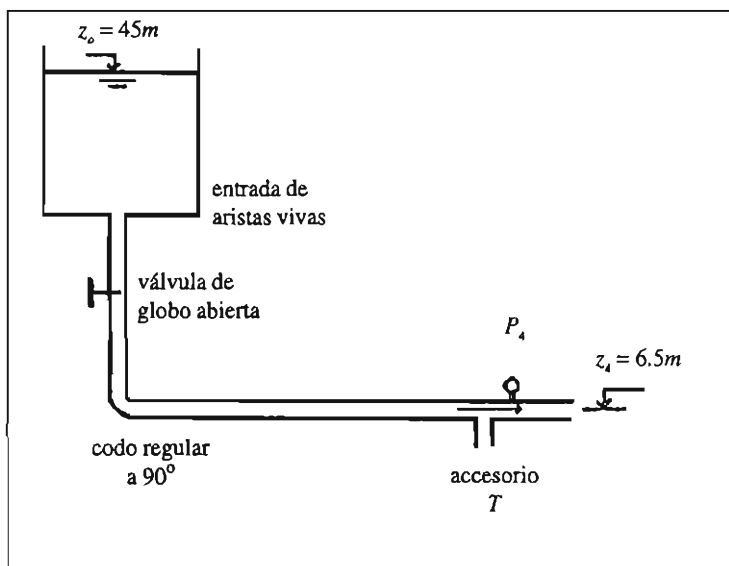


Figura 4.15: Problemas propuestos 4.2 y 4.3.

* La ecuación de la energía en la acostumbrada expresión sencilla, puede aplicarse a problemas de flujo gradualmente impermanente.

* El diámetro económico de una conducción es el que hace mínimos los costos de inversión, operación y mantenimiento de la instalación. En el caso de una instalación de bombeo el costo de bombeo disminuye cuando aumenta el diámetro pero el costo de la tubería se incrementa. El cálculo del diámetro económico puede hacerse mediante un análisis de costos o por fórmulas aproximadas.

Problemas propuestos

4.1 Calcular la pérdida total en un tubo de asbesto-cemento de 300 mm de diámetro y 1,200 m de longitud cuyos accesorios son: una entrada de aristas vivas, dos curvas suaves de 45° ($r_c/d = 2$), una válvula de compuerta abierta y la salida.

a) Empleando el diagrama de Moody

b) Empleando la ecuación de Hazen-Williams y el método de longitudes equivalentes

4.2 Cuánto vale la presión P_4 en el ejemplo de la figura 4.15, en la que el tubo es de fierro fundido con 10 años de uso, de 150 mm de diámetro y 420 m de longitud. El gasto es de 37 l/s y no se deriva fracción alguna del mismo por la rama lateral del accesorio T.

4.3 Para el mismo caso de la figura 4.15 supóngase que la presión P_4 es de 213,000 Pa; el tubo es de acero comercial de 100 mm de diámetro y 720 m de longitud. Calcular el gasto.

4.4 Calcular las longitudes equivalentes de una válvula de codo y de un codo regular a 45° con uniones a bridas; ambos accesorios poseen un diámetro de 200 mm

- Emplear el nomograma de la figura 4.6.
- Emplear la fórmula 4.12 suponiendo que el tubo es de fierro fundido con 20 años de uso.
- Emplear la fórmula 4.16 para el mismo material del inciso anterior.
- Emplear la fórmula 4.2 suponiendo que el tubo es de PVC
- Emplear la fórmula 4.16 para el mismo material del inciso anterior

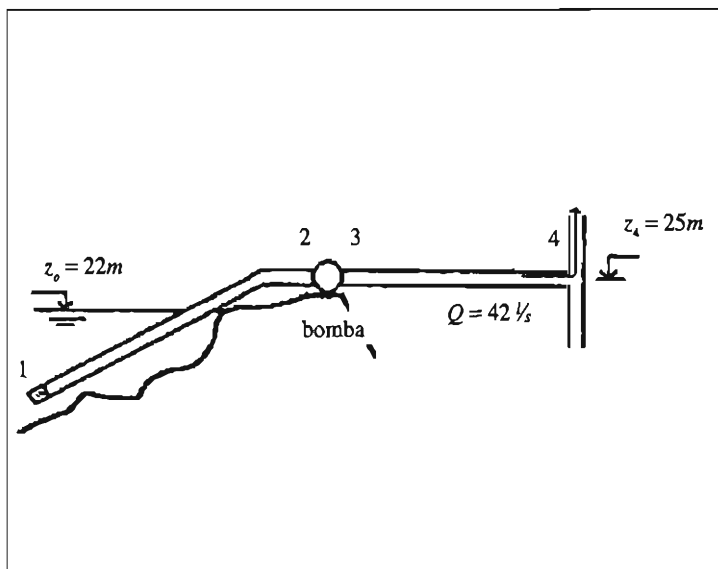


Figura 4.16: Problema propuesto 4.5.

4.5 En la instalación de la figura 4.16 la bomba posee una eficiencia del 69%. El tubo es de acero galvanizado de 200 mm, la longitud entre las secciones 1 y 2 es de 20 m y entre 3 y 4 de 160 m. Los accesorios son: una válvula de pie con rejilla de obturador oscilante, un codo normal a 45° , una válvula de compuerta abierta y la T ubicada a la salida, la cual funciona como codo. Inmediatamente después de la T la presión es de 180 kPa .

- Calcular la carga de la bomba.
- Calcular las presiones a la entrada y a la salida de la bomba (secciones 2 y 3).

4.6 Los tanques T_1 y T_2 de la figura 4.17 están unidos por tres tubos de acero galvanizado, cuyos diámetros son: $D_I = 75$ mm, $D_{II} = D_{III} = 100$ mm. Las longitudes son $L_I = L_{II} = 450$ m; la longitud L_{III} se divide en dos tramos: L_a (tramo de succión de la bomba) = 11 m y L_d (descarga) = 700 m. Los accesorios son en cada tramo: una entrada, una salida, dos codos normales a 90° y una válvula de compuerta abierta ¿Cuánto valen la presión P_d en la salida de la bomba y la carga H_m de la misma para que el flujo sea permanente? (Aclaración: a pesar del dibujo debe entenderse que los tubos no son verticales, se trata de un esquema simplificado).

4.7 Calcular el gasto en el tubo de cobre de la figura 4.18, cuyo diámetro es de una pulgada y su longitud de 35 m. El tubo parte de una conducción principal de 4" cuya presión interior es $p_o = 140 \text{ kPa}$ y después de un recorrido recto y horizontal remata en una válvula de globo abierta que descarga a la atmósfera.

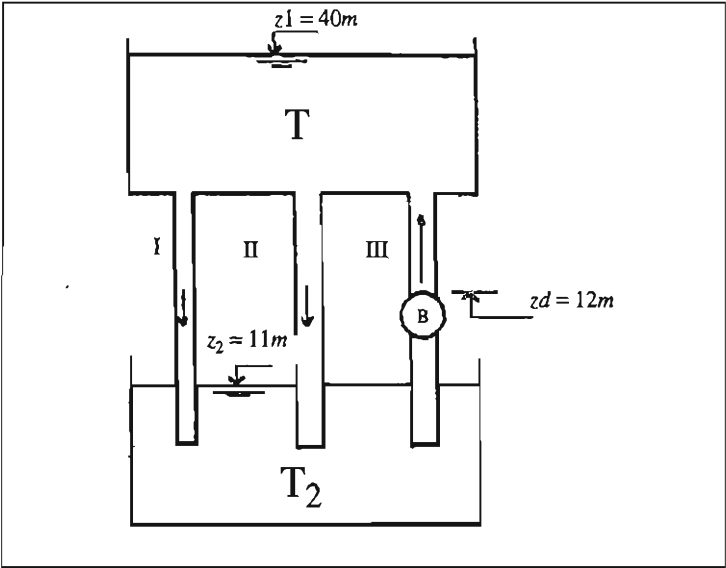


Figura 4.17: Problema propuesto 4.6.

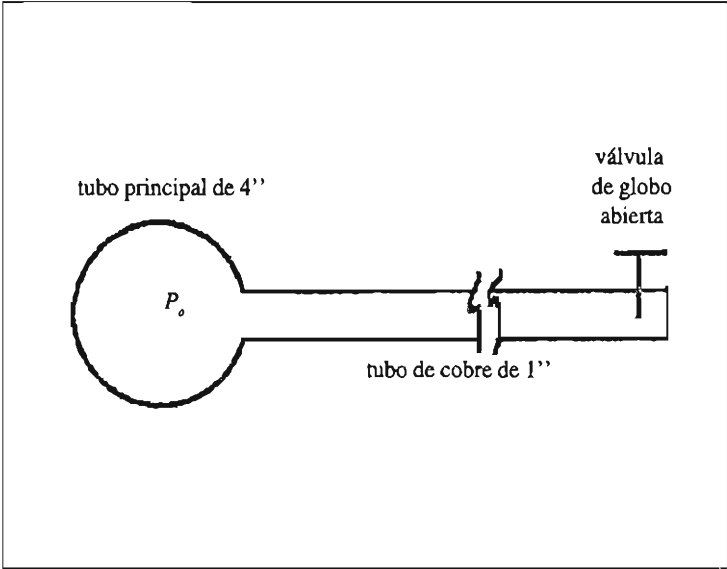


Figura 4.18: Problema propuesto 4.7.

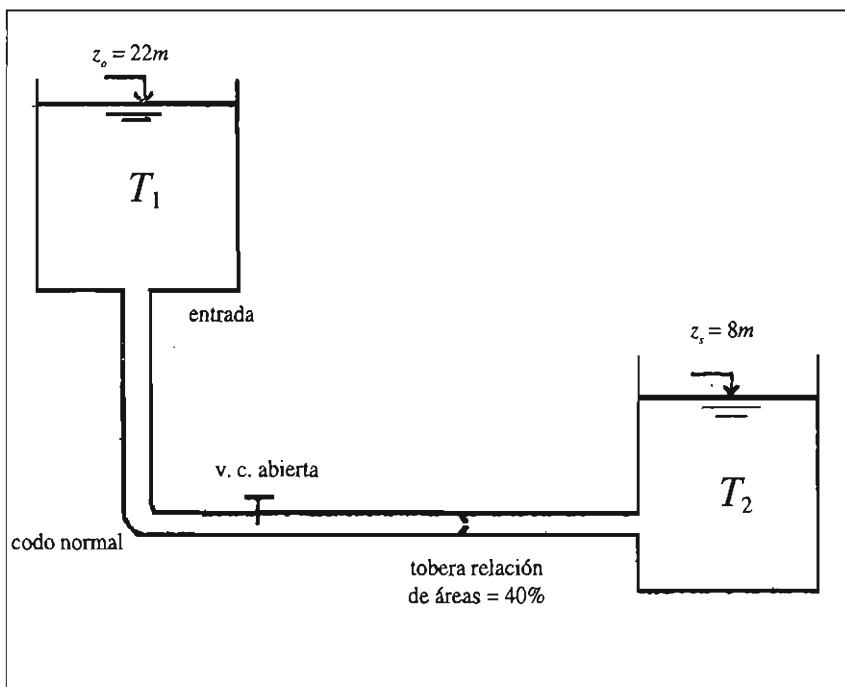


Figura 4.19: Problema propuesto 4.8.

4.8 La figura 4.19 presenta una conducción formada por un tubo de PVC de 250 mm de diámetro y 100 m de longitud que une los tanques T_1 y T_2 . Si se decide intercalar una bomba en el tubo para duplicar el gasto que influye por gravedad ¿Qué potencia se requerirá para la misma? Tomar η . Eficiencia de la bomba = 65%

4.9 Trazar los diagramas de energía del problema resuelto 4.7 y de los problemas propuestos 4.2 y 4.5

4.10 Volver a resolver el problema resuelto 4.9 aplicando la ecuación 4.28 y calcular el error que se comete al aceptar la fórmula aproximada 4.29 para el gasto de cálculo.

4.11 Deducir la ecuación del tiempo de drenado de un tanque pero suponiendo que la sección horizontal del mismo disminuye linealmente con su altura $A_d(z) = A_o - k(z_o - z)$, donde A_d es la sección horizontal del tanque a un nivel genérico z (ver figura 4.13), A_o es dicha sección en el nivel inicial z_o y k es una constante (se supone que el nivel Z_s de la salida es igual cero)

4.12 El presurizador de la figura 4.20 se emplea para llenar el tanque de la derecha; para ello se emplean dos tubos de acero galvanizado de 140 m de longitud cada uno. Uno es de 150 mm de diámetro y el otro de 200 mm. Ambos tienen en su recorrido dos codos de 45°

a) ¿Cuál es el tiempo Δt_1 que tarda en llenarse el tanque de la derecha hasta el nivel z_{t1} si su volumen es de 400 m^3 hasta el mismo?

b) ¿Cuál es el tiempo adicional Δt_2 que se necesita para llegar al nivel z_{t2} , para lo cual se requieren otros 400 m^3 ?

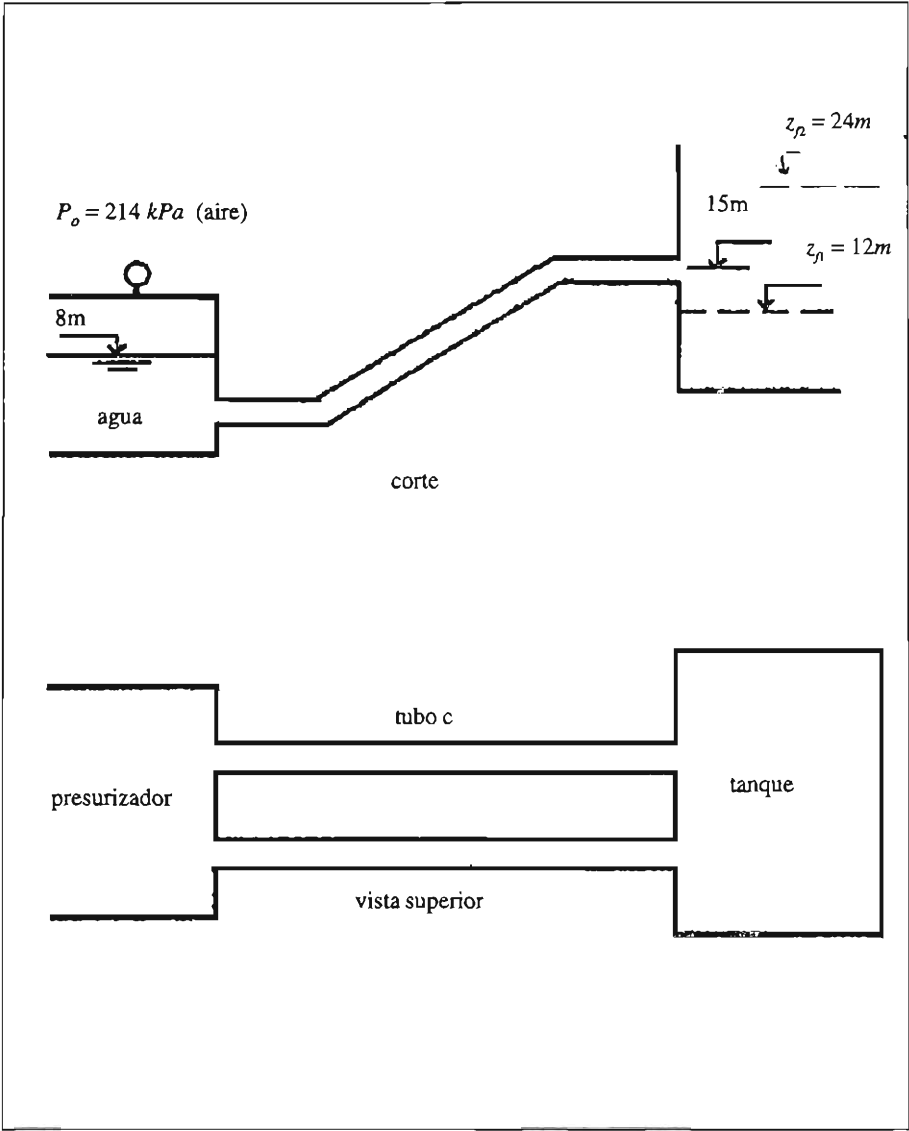


Figura 4.20: Problema propuesto 4.12.

CAPITULO 5

TUBOS EN SERIE Y

EN PARALELO

5. TUBOS EN SERIE Y EN PARALELO

5.1 Tubos en serie

5.2 Tubos en paralelo

5.3 Tubo equivalente

5.4 Combinación de tubos en serie y en paralelo

5.1 Tubos en serie

Hasta ahora se ha visto el caso de conducciones con mayor o menor número de accesorios pero formados por tramos singulares. En este capítulo se verán combinaciones de tubos. Para empezar se estudiará el problema de tubos en serie, que se definen como *todo arreglo de tramos de tubería de características físicas diversas alineadas en la misma conducción*. Un ejemplo es el de la figura 5.1, que presenta tres tubos en serie. Es condición esencial de este tipo de arreglos que el gasto se mantenga constante a lo largo del conducto.

Para analizar este problema, así como cualquier otro en hidráulica, se aplicarán las ecuaciones fundamentales. La ley de continuidad arroja un resultado directo y obvio: el gasto es el mismo en todos los tramos del arreglo

$$Q_I = Q_{II} = Q_{III} = Q_S \quad (5.1)$$

En esta expresión Q_S es el gasto de arreglo en serie. En general para T tramos será:

$$Q_S = Q_K \text{ para todo tramo } k \ (1 < k < T) \quad (5.2)$$

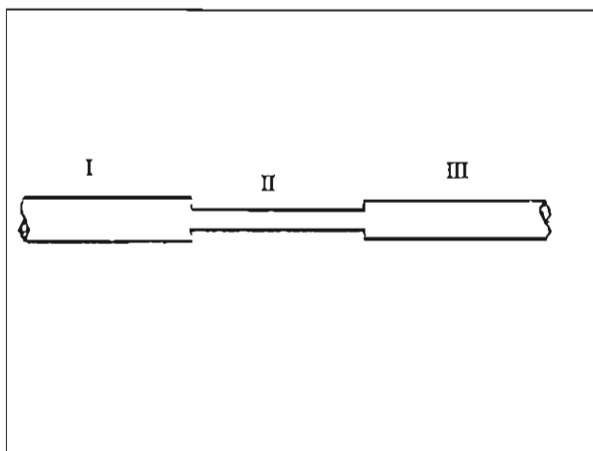


Figura 5.1: Arreglo de tubos en serie.

La aplicación de la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 4 arroja:

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_4 + \frac{P_4}{\gamma} + \frac{U_4^2}{2g} \right) = H_{fs} \quad (5.3)$$

A su vez la pérdida de energía del arreglo H_{fs} puede expresarse como la suma de las pérdidas parciales

$$H_{fs} = H_{fI} + H_{fII} + H_{fIII} \quad (5.4)$$

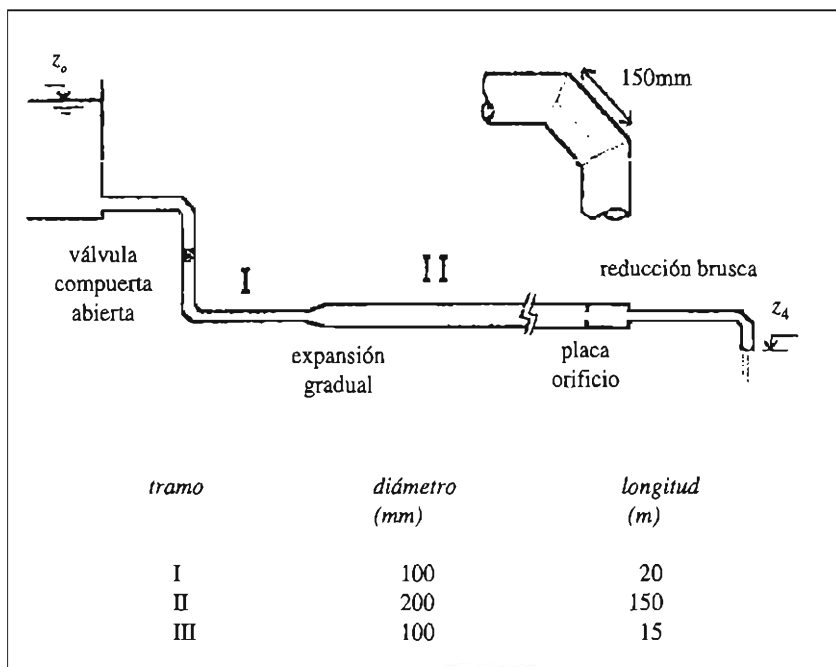


Figura 5.2: Problema resuelto 5.1.

y en general para T tramos

$$H_{fs} = \sum_{k=1}^T H_{fk} \quad (5.5)$$

Al igual que en el caso de tubos sencillos los dos problemas principales que pueden plantearse son: el cálculo de la pérdida H_{fs} teniendo como dato el gasto, o el cálculo del gasto Q_s conociendo la pérdida. El primero de estos casos es muy simple, ya que no es más que la combinación del cálculo de la pérdida en varios tipos sencillos. En efecto, para resolver el problema planteado por la ecuación 5.3 basta calcular

sucesivamente H_n , H_m y H_{m} para luego sumarlos y obtener H_s por la fórmula 5.4. Esto es perfectamente posible porque al conocer el gasto del arreglo se conocen también los gastos individuales que son idénticos.

El problema inverso, en el que la incógnita es el gasto, es un poco más interesante ya que tener como dato la pérdida del arreglo no significa que se conozcan las pérdidas parciales. Para obtener la fórmula que resuelve el problema se partirá de las ecuaciones de resistencia al flujo en los tramos del arreglo. Con tal fin puede emplearse la fórmula de Darcy-Weisbach, la de Hazen-Williams o cualquiera otra adecuada al caso; aquí con el fin de darle mayor generalidad a la explicación, se empleará la expresión simbólica 2.70:

$$H_n = a_n Q_n^n$$

$$H_m = a_m Q_m^n$$

$$H_{\text{m}} = a_{\text{m}} Q_{\text{m}}^n$$

Considerando las expresiones 5.1 y 5.4 la suma de estas tres arroja:

$$H_s = (a_n + a_m + a_{\text{m}}) Q_s^n \quad (5.6)$$

Para un arreglo de T tramos

$$H_s = \sum_{k=1}^T a_k Q_s^n \quad (5.7)$$

Por lo tanto la fórmula para evaluar el gasto será:

$$Q_s = \left(\frac{H_s}{\sum_{k=1}^T a_k} \right)^{1/n} \quad (5.8)$$

Si se emplea la fórmula de Darcy-Weisbach, el coeficiente a vale

$$a = \frac{8}{\pi^2 g D^4} \left(\frac{fL}{D} + \Sigma K \right)$$

y el exponente n vale 2; por lo tanto la ecuación 5.8 se transforma en

$$Q_s = \pi \sqrt{\frac{H_s}{\sum_{k=1}^T \left(\frac{f_k L_k + \sum K}{D^5} \right)}} \quad (5.9)^1$$

y si se aplica el método de longitudes equivalentes para las pérdidas secundarias

$$Q_s = \pi \sqrt{\frac{H_s}{\sum_{k=1}^T \left(\frac{f L_c + \sum K}{D^5} \right)}} \quad (5.10)$$

Como siempre el empleo del factor de fricción f obliga a una resolución iterativa; el procedimiento es el siguiente:

- i) Se calculan las rugosidades relativas $(\epsilon/D)_k$ de cada uno de los tramos.
- ii) Se adopta para cada tramo un factor de fricción tentativo $f_k^{(1)}$ compatible con la rugosidad relativa del mismo.
- iii) Se calcula un gasto $Q_s^{(1)}$ con la ecuación 5.9 (o la 5.10 en su caso empleando los factores de fricción supuestos en el paso anterior).
- iv) Se calculan las velocidades de los tramos por la ecuación de continuidad

$$U_k^{(1)} = \frac{4 Q_s^{(1)}}{\pi D_k^2}$$

- v) Se calcula el número de Reynolds de cada tramo $Re_k^{(1)} = U_k D_{\psi_k}$.
- vi) Se extraen del diagrama de Moody nuevos factores de fricción $f_k^{(2)}$ que para cada tramo serán función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds $Re_k^{(1)}$ respectivos.
- vii) Se regresa al paso iii) y se calcula un nuevo gasto $Q_s^{(2)}$; se procede con los pasos subsiguientes.

El procedimiento termina cuando los factores de fricción de dos iteraciones sucesivas son prácticamente iguales:

$$f_k^{(n)} \cong f_k^{(n+1)}$$

En cuyo caso se adopta como verdadero el gasto calculado en último término:

$$Q_s = Q_s^{(n)}$$

Si se emplea la ecuación de Hazen-Williams (o cualquier otra fórmula empírica monómica), ya no se requieren iteraciones y el cálculo es directo. El coeficiente a para dicha ecuación vale

¹ En esta fórmula, así como en las subsiguientes, un subíndice colocado al pie de un paréntesis identifica a todas las variables encerradas en el mismo

$$a = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \frac{L_c}{D^{4.85}}$$

y el exponente $n = 1.85$. La fórmula 5.8 queda de la siguiente manera

$$Q_S = 0.278 \left[\frac{H_{fs}}{\sum_{k=1}^T \left(\frac{L_c}{C_H^{1.85} D^{4.85}} \right)_k} \right]^{0.514} \quad (5.11)$$

Con frecuencia todos los tramos del arreglo son del mismo material, es decir que el coeficiente C_H es constante; en tal caso la ecuación se simplifica a:

$$Q_S = 0.278 C_H \left[\frac{H_{fs}}{\sum_{k=1}^T \left(\frac{L_c}{D^{4.85}} \right)_k} \right]^{0.514} \quad (5.12)$$

A continuación se resuelven algunos ejemplos

Problema resuelto 5.1: La conducción de la figura 5.2 está formada por una sucesión de tres tubos, cuyos diámetros, longitudes y accesorios se indican. El líquido es agua a 8°C y el material es acero soldado con bastante uso ($\epsilon = 0.25\text{ mm}$). Los codos están formado por gajos rectos con soldaduras oblicuas como se indica en un detalle de la propia figura. La expansión gradual tiene un ángulo de apertura de 20° . La placa-orificio tiene una relación de áreas del 30%. Calcular la pérdida total si el gasto es de $25\text{ m}^3/\text{s}$.

Solución: Se trata de un problema de cálculo de la pérdida en un arreglo en serie. Si se aplica la ecuación de la energía entre el depósito T_0 y la sección de salida A_4 , resulta:

$$z_0 - z_4 = H_{fs} = H_{I+II+III}$$

Tal como se sugirió en el capítulo anterior, la energía cinética de salida se incluye en el término de pérdidas secundarias, en este caso del tramo III. Aplicando ahora la ecuación 4.2

$$H_{fs} = \left(\frac{fL}{D} + \Sigma K \right)_I \frac{U_I^2}{2g} + \left(\frac{fL}{D} + \Sigma K \right)_{II} \frac{U_{II}^2}{2g} + \left(\frac{fL}{D} + \Sigma K \right)_{III} \frac{U_{III}^2}{2g} \quad (5.13)$$

A continuación se procederá a encontrar los valores del factor de fricción y de los coeficientes K de los accesorios para los diferentes tramos. Para el agua a 10°C es $\nu = 1.36 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$

$$\text{Tramo I: } \frac{\epsilon}{D_I} = \frac{0.25}{100} = 0.0025, \quad U_I = \frac{4 \times 0.025}{\pi \times 0.1^2} = 3.18\text{ m/s}$$

el número de Reynolds resulta $Re_I = 234,000$

del diagrama de Moody se extrae $f_I = 0.0255$

Los accesorios y sus coeficientes K son los siguientes (Se emplean las ayudas de cálculo de capítulo 3):

– Entrada

$$K_{ent} = 0.5$$

- válvula de compuerta abierta
- codo soldado
- expansión gradual

$$K_{v.c.a.} = 0.11$$

$$K_{co.} = 0.4$$

$$K_{ex.g.} = 0.37$$

$$\Sigma K_I = K_{ent.} + 2K_{co.} + K_{v.g.a.} + K_{ex.g.} =$$

$$0.5 + 2 \times 0.4 + 0.11 + 0.37 = 1.78$$

$$\text{Tramo II: } \frac{\epsilon}{D_{II}} = \frac{0.25}{200} = 0.00125, \quad U_{II} = \frac{4 \times 0.025}{\pi \times 0.2^2} = 0.8 \text{ m/s}$$

$$Re = 118,000$$

$$f_{II} = 0.0227$$

El único accesorio es la placa orificio cuyo coeficiente es según la fórmula 3.26

$$K_{p.o.} = \left(\frac{1}{0.6 \times 0.3} - 1 \right)^2 = 20.7$$

Tramo III: Los valores de rugosidad relativa, velocidad media, número de Reynolds y factor de fricción son los mismos que en el tramo I

$$U_{III} = 3.18 \text{ m/s } f = 0.0255$$

Los coeficientes de los accesorios son:

- Reducción brusca
- codo soldado
- salida

$$K_{rd.b} = 0.32$$

$$K_{co.} = 0.4$$

$$K_{sal.} = 1$$

$$\Sigma K_{III} = K_{rd.b} + K_{co.} + K_{sal.} = 0.32 + 0.4 + 1 = 1.72$$

Reemplazando en la 5.13

$$H_{fs} = \left(\frac{0.0255 \times 20}{0.1} + 1.78 \right) \frac{3.18^2}{19.6} + \left(\frac{0.0227 \times 150}{0.2} + 20.7 \right) \times$$

$$\times \frac{0.80^2}{91.6} + \left(\frac{0.0255 \times 15}{0.1} + 1.72 \right) \frac{3.18^2}{19.6} = 3.55 + 1.23 \times 2.86 = 7.64m$$

Antes de expresar el resultado final se escribieron por separado las pérdidas individuales de los tramos. Como puede apreciarse los tramos I y III poseen una pérdida mucho mayor que el tramo II, a pesar de que éste es mucho más largo que aquéllos; esto pone en evidencia la fuerte influencia del diámetro sobre la pérdida. A partir de este ejemplo el lector podrá darse cuenta que sería una muy mala idea completar una tubería larga de 200 mm de diámetro con un corto tramo de 100 mm *sólo porque está disponible en bodega.*

Problema resuelto 5.2: Calcular el gasto en un arreglo de tres tubos en serie de PVC que conducen agua a 20° C. Sus diámetros son respectivamente: $D_I = 150$ mm, $D_{II} = 200$ mm y $D_{III} = 150$ mm; sus longitudes: $L_I = 350$ m, $L_{II} = 400$ m y $L_{III} = 660$ m. Sus coeficientes de pérdidas secundarias: $\Sigma K_{III} = 2.9$. La pérdida total es $H_{FS} = 18.3$ m.

- Emplear la ecuación de Darcy-Weisbach y el diagrama de Moody.
- Emplear la ecuación de Hazen-Williams y el método de longitudes equivalentes.
- Representar el diagrama de energía.

Solución:

- La rugosidad del PVC es $\epsilon = 0.025$ mm y la viscosidad del agua a 20° C es $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

- Se calculan las rugosidades relativas de los tres tramos

$$\frac{\epsilon}{D_I} = \frac{0.025}{150} = 0.000167 \quad \frac{\epsilon}{D_{II}} = \frac{0.025}{200} = 0.000125$$

$$\frac{\epsilon}{D_{III}} = \frac{0.025}{150} = 0.000167$$

- Se adoptan factores de fricción tentativos

$$f_I^{(1)} = 0.016 \quad f_{II}^{(1)} = 0.014 \quad f_{III}^{(1)} = 0.016$$

- Se calcula un gasto aproximado por la fórmula 5.9

$$Q_s^{(1)} = \pi \sqrt[5]{\frac{18.3}{\frac{0.016 \times 350}{\frac{0.15}{0.15^4}} + 3.5 \frac{0.014 \times 400}{\frac{0.2}{0.2^4}} + 1.8 \frac{0.016 \times 660}{\frac{0.5}{0.15^4}} + 2.9}}$$

- Se calculan las velocidades medias de los tramos

$$U_I^{(1)} = \frac{4 \times 0.0301}{\pi \times 0.15^2} = 1.70 \text{ m/s} \quad U_{II}^{(1)} = \frac{4 \times 0.0301}{\pi \times 0.2^2} = 0.95 \text{ m/s}$$

$$U_{III}^{(1)} (= U_I^{(1)}) = 1.70 \text{ m/s}$$

- Se calculan los números de Reynolds

$$\text{Re}_I^{(1)} = \frac{1.70 \times 0.15}{10^{-6}} = 255,000 \quad \text{Re}_{II}^{(1)} = \frac{0.95 \times 0.20}{10^{-6}} = 190,000$$

$$\text{Re}_m^{(1)} (= \text{Re}_I^{(1)}) = 255,000$$

vi) Se obtienen del diagrama de Moody los nuevos factores de fricción en función de las rugosidades relativas y los números de Reynolds

$$f_I^{(2)} = 0.0163 \quad f_{II}^{(2)} = 0.0167 \quad f_{III}^{(2)} = 0.0163$$

Volviendo al paso iii) se calcula un nuevo gasto con estos factores:

$$Q_S^{(2)} = 0.0297 \text{ m}^3/\text{s}$$

iv) Las nuevas velocidades medias son:

$$U_I^{(2)} = 1.68 \text{ m/s} \quad U_{II}^{(2)} = 0.94 \text{ m/s} \quad U_{III}^{(2)} = 1.68 \text{ m/s}$$

v) Los nuevos números de Reynolds:

$$\text{Re}_I^{(2)} = 252,000 \quad \text{Re}_{II}^{(2)} = 188,000 \quad \text{Re}_{III}^{(2)} = 252,000$$

vi) Con los cuales se obtienen los siguientes factores de fricción

$$f_I^{(3)} = 0.0163 \quad f_{II}^{(3)} = 0.0167 \quad f_{III}^{(3)} = 0.0163$$

Siendo éstos iguales a los anteriores, el nuevo gasto no será diferente al calculado en último término; por lo tanto

$$Q_S = Q_S^{(2)} = 0.297 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Para efectuar el cálculo con la fórmula de Hazen-Williams deberán calcularse primero las longitudes de cálculo de los tramos haciendo uso de la ecuación 4.16; el valor de C_H para el PVC es 140

$$\Sigma L_{eI} = \frac{\Sigma K_I C_H^{1.85} D_I^{1.15}}{120} = \frac{3.5 \times 140^{1.85} \times 0.15^{1.15}}{120} = 30.7 \text{ m}$$

$$\Sigma L_{eII} = \frac{1.8 \times 140^{1.85} \times 140^{1.85} \times 0.2^{1.15}}{120} = 22.0 \text{ m}$$

$$\Sigma L_{eIII} = \frac{2.9 \times 140^{1.85} \times 0.15^{1.15}}{120} = 25.5 \text{ m}$$

$$L_{cI} = L_I + \Sigma L_{eI} = 350 + 30.7 = 380.7 \text{ m}$$

$$L_{cII} = 400 + 22 = 422 \text{ m} \quad L_{cIII} = 660 + 25.5 = 685.5 \text{ m}$$

Para calcular el gasto se emplea directamente la ecuación 5.12

$$Q_S = 0.278 \times 140 \left[\frac{18.3}{\frac{380.7}{0.15^{4.85}} + \frac{422}{0.2^{4.85}} + \frac{685.5}{0.15^{4.85}}} \right]^{0.541} = 0.0283 \text{ m}^3/\text{s}$$

valor que difiere en un 5% del calculado con el diagrama de Moody

c) Para representar el diagrama de energía se requiere calcular las pérdidas parciales; por simplicidad se lo hará por la fórmula de Hazen-Williams

$$H_{fI} = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \frac{Q_I^{1.85}}{D_I^{4.85}} L_{cI} = \frac{10.68}{140^{1.85}} \frac{0.0283^{1.85}}{0.15^{4.85}} \times 380.7 = 5.90 \text{ m}$$

$$H_{fII} = \frac{10.68}{140^{1.85}} \frac{0.0283^{1.85}}{0.2^{4.85}} \times 422 = 1.62 \text{ m}$$

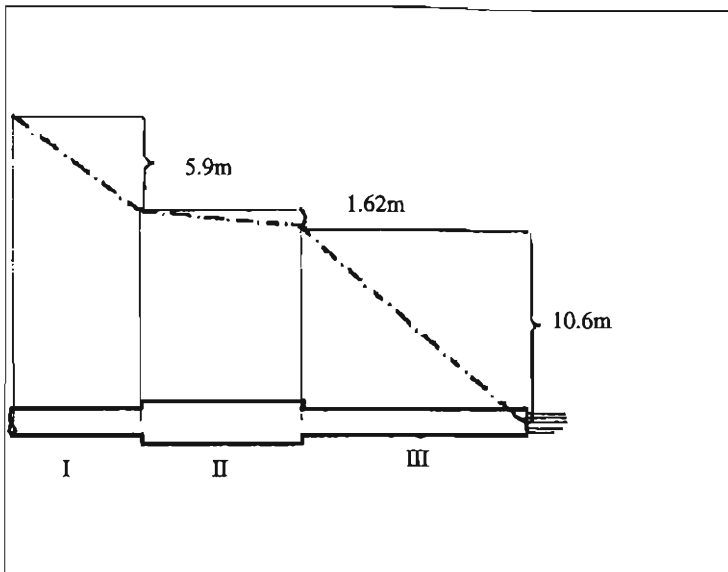


Figura 5.3: Diagrama de energía del problema resuelto 5.2; la energía cinética es tan pequeña que las líneas de energía y piezométrica prácticamente coinciden.

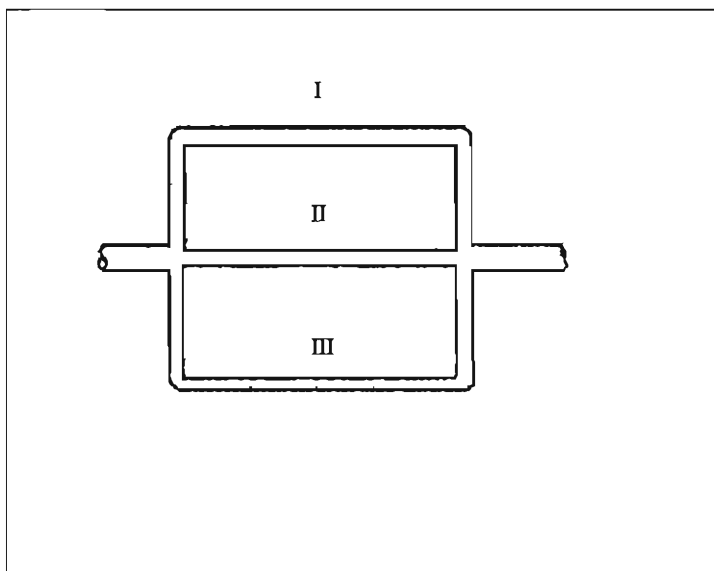


Figura 5.4: Arreglo de tubos en paralelo.

$$H_{fIII} = \frac{10.68}{14^{1.85}} \frac{0.0283}{0.15^{4.85}} \times 685.5 = 10.62 \text{ m}$$

Como era de esperar, la suma de estas tres pérdidas parciales da 18.14 m, la pequeña diferencia con los 18.3 m que figuran como dato del problema, es una simple cuestión de redondeo. En la figura 5.3 se representa el diagrama de energía

5.2 Tubos en paralelo

Un arreglo de *tubos en paralelo* es un conjunto de tubos que se separan en un nudo para volver a unirse en otro. Un ejemplo es el de la figura 5.4. A partir de la ley de continuidad se puede deducir que el gasto Q_P del arreglo se reparte entre los tramos que lo componen, es decir que será igual a la suma de ellos

$$Q_P = Q_I + Q_{II} + Q_{III} \quad (5.14)$$

En general para un arreglo de T tramos

$$Q_P = \sum_{k=1}^T Q_k \quad (5.15)$$

La ecuación de la energía aplicada entre los nudos 1 y 2 de la figura, dice simplemente que:

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g}\right) = H_{fp}$$

La pérdida del arreglo H_{fp} debe ser la misma cualquiera sea el camino que se considere. Recuerdese por un momento el significado físico de la H_{fp} ; según él cada partícula líquida experimenta una *pérdida de energía por unidad de peso* igual a H_{fp} al transitar del nudo 1 al nudo 2 y eso es independiente del tramo que escoja para desplazarse de una posición a otra. Es decir que

$$H_{fp} = H_{fI} = H_{fII} + H_{fIII} \quad (5.16)$$

y en general para T tramos

$$H_{fp} = H_{fk} \text{ para todo tramo } k \ (1 < k < T)$$

Si se comparan las ecuaciones 5.15 y 5.17 con las 5.2 y 5.5, que corresponden a tubos en serie, se verá que son muy similares, sólo que lo que ocurre para los gastos en un caso es válido para las pérdidas en otro y viceversa.

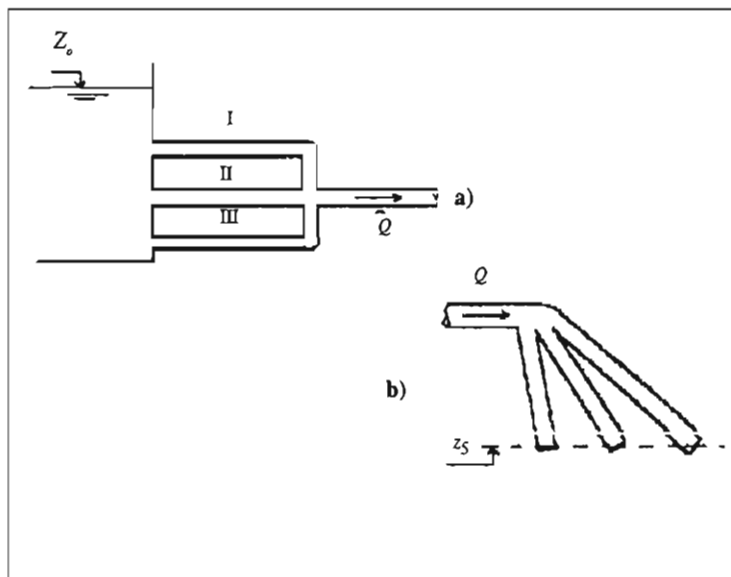


Figura 5.5: Casos a los que también puede aplicarse el concepto de arreglo de tubos en paralelo.

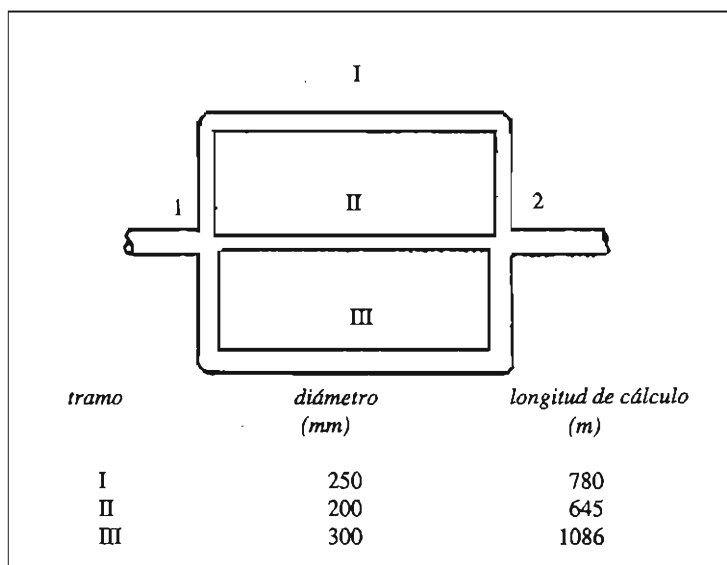


Figura 5.6: Problema resuelto 5.3.

Los esquemas que se muestran en la figura 5.5 también representan tubos en paralelo. En la parte a) se ve un conjunto de tubos que parten de un depósito y se unen luego en un nudo. No existe en este caso el nudo superior del que habla la definición, pero las ecuaciones 5.15 y 5.17 son válidas ya que el nivel energético es el mismo a la entrada de todos los tramos y está determinado por la elevación z_0 del depósito. En la parte b) de la figura lo que falta es el nudo inferior, pero todos los tubos descargan a la atmósfera y al mismo nivel, por lo tanto las ecuaciones mencionadas también son de aplicación. Cualquier otro caso que pueda modelarse con dichas ecuaciones puede considerarse un arreglo en paralelo aunque no se adapte estrictamente a la definición dicha al comienzo de este apartado.

Para un arreglo en paralelo, el problema de calcular la pérdida teniendo como dato el gasto, es el problema más difícil pues se conoce el gasto total mas no la distribución del mismo en los tramos. A continuación se obtendrá una fórmula práctica partiendo, como en el caso de tubos en serie, de la ecuación de resistencias al flujo

$$H_f = a Q^n \quad (2.70)$$

sólo que ahora será necesario despejar el gasto:

$$Q = \left(\frac{H_f}{a} \right)^{1/n} \quad (5.18)$$

o bien

$$Q = b H_f^{1/n} \quad (5.19)$$

donde $b = a^{-1/n}$ es un coeficiente que se empleará en ocasiones a fin de simplificar la simbología. Para los tres tramos de la figura 5.4 es:

$$Q_I = b_I H_{fI}^{1/n}$$

$$Q_{II} = b_{II} H_{fII}^{1/n}$$

$$Q_{III} = b_{III} H_{fIII}^{1/n}$$

Sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta las ecuaciones 5.15 y 5.17

$$Q_P = (b_I + b_{II} + b_{III}) H_{fP}^{1/n}$$

Para un arreglo de T tramos es

$$Q_P = \sum_{k=1}^T b_k H_{fP}^{1/n} \quad (5.20)$$

Por lo tanto la pérdida H_{fP} se calcula como

$$H_{fP} = \left(\frac{Q_P}{\sum_{k=1}^T b_k} \right)^n \quad (5.21)$$

O bien, usando el coeficiente a en lugar del coeficiente b

$$H_{fP} = \left(\frac{Q_P}{\sum_{k=1}^T \frac{1}{a_k^{1/n}}} \right)^n \quad (5.22)$$

Si se emplea la ecuación de Darcy-Weisbach esta expresión adquiere la forma

$$H_{fP} = \frac{8}{\pi^2 g} \left[\frac{Q_P}{\sum_{k=1}^T \left(\frac{D_2}{\sqrt{f \frac{L}{D} + \Sigma K}} \right)_k} \right]^2 \quad (5.23)$$

O bien, empleando el método de longitudes equivalentes:

$$H_{fP} = \frac{8}{\pi^2 g} \left[\frac{Q_P}{\sum_{k=1}^T \left(\sqrt{\frac{D^5}{f L_c}} \right)_k} \right]^2 \quad (5.24)$$

El algoritmo que se sigue para aplicar esta ecuación es el siguiente:

- i) Se calculan las rugosidades relativas $(\epsilon/D)_k$ de cada uno de los tramos.
- ii) Se adopta para cada tramo un factor de fricción tentativo $f_k^{(1)}$ compatible con la rugosidad relativa del mismo.
- iii) Se calcula una pérdida $H_k^{(1)}$ con la ecuación 5.23 o la 5.24.
- iv) Se calcula la velocidad media de cada tramo por la ecuación

$$U_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2 g H_{fP}}{\left(\frac{f_k^{(1)} L}{D} + \Sigma K \right)_k}} \quad (5.25)$$

O, lo que es equivalente:

$$U_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2 g H_{fP} D_k}{f_k^{(1)} L_{ek}}} \quad (5.26)$$

- v) Se calculan los números de Reynolds $Re_k^{(1)} = U_k^{(1)} D_{k\nu}$
 - vi) Se extraen del diagrama de Moody los factores de fricción de segunda iteración $f_k^{(2)}$ en función del número de Reynolds y la rugosidad relativa de cada tramo.
 - vii) Se regresa al paso iii) y se calcula la nueva pérdida $H_P^{(2)}$. Se siguen los pasos subsecuentes.
- El procedimiento termina cuando los factores de fricción de dos iteraciones sucesivas son prácticamente iguales:

$$f_k^{(n)} \cong f_k^{(n+1)} \dots \text{ para todo } k$$

En cuyo caso se adopta como verdadera la pérdida calculada en último término:

$$H_{fP} \cong H_P^{(n)}$$

Si se opta por la ecuación de Hazen-Williams, la 5.21 se transforma en:

$$H_{fP} = 10.68 \left[\frac{Q_P}{\sum_{k=1}^T \left(\frac{C_H D^{2.62}}{L_c^{0.541}} \right)_k} \right]^{1.85} \quad (5.27)$$

Si todos los tramos del arreglo tienen el mismo coeficiente C_H esta ecuación se simplifica a:

$$H_{fp} = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \left[\frac{Q_P}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{D}{L_c} \right)^{2.62}} \right]^{1.85} \quad (5.28)$$

A continuación se resolverán algunos ejemplos

Problema resuelto 5.3: Calcular la pérdida y la distribución de gastos para el arreglo de la figura 5.6; los diámetros y longitudes de cálculo se indican en la misma. El material es acero galvanizado nuevo, el líquido es agua a temperatura ambiente y el gasto total es de 205 l/s.

a) Empleando el diagrama de Moody.

b) Con la fórmula de Hazen-Williams.

Solución:

a) Para el acero galvanizado la rugosidad es $\epsilon = 0.15$ mm y la viscosidad del agua a temperatura ambiente es de 10^{-6} m²/s.

i) Se calculan las rugosidades relativas de los tres tramos

$$\frac{\epsilon}{D_I} = \frac{0.15}{250} = 0.0006 \quad \frac{\epsilon}{D_{II}} = \frac{0.15}{200} = 0.00075$$

$$\frac{\epsilon}{D_{III}} = \frac{0.15}{300} = 0.0005$$

ii) Se adoptan factores de fricción tentativos

$$f_I^{(0)} = 0.019 \quad f_{II}^{(0)} = 0.021 \quad f_{III}^{(0)} = 0.020$$

iii) Se calcula una pérdida aproximada por la fórmula 5.24, ya que en este caso se tiene como dato las longitudes de cálculo de los tramos

$$H_{fp} = \frac{8}{\pi^2 9.8} \left[\frac{0.205}{\sqrt{\frac{0.25^5}{0.019 \times 780}} + \sqrt{\frac{0.2^5}{0.021 \times 645}} + \sqrt{\frac{0.3^5}{0.021 \times 1086}}} \right]^2 = 6.26 \text{ m}$$

iv) Las velocidades medias de los tramos son:

$$U_I^{(0)} = \sqrt{\frac{2gH_{fp}D_I}{f_I^{(0)}L_{cl}}} = \sqrt{\frac{19.6 \times 6.26 \times 0.25}{0.019 \times 780}} = 1.44 \text{ m/s}$$

$$U_{II}^{(1)} = \sqrt{\frac{19.6 \times 6.26 \times 0.2}{0.021 \times 645}} = 1.35 \text{ m/s}$$

$$U_{II}^{(1)} = \sqrt{\frac{19.6 \times 6.26 \times 0.2}{0.021 \times 1086}} = 1.30 \text{ m/s}$$

v) Se calculan los números de Reynolds

$$\text{Re}_I^{(1)} = \frac{U_I^{(1)} D_I}{\nu} = \frac{1.44 \times 0.25}{10^{-6}} = 360,000$$

$$\text{Re}_I^{(2)} = \frac{1.35 \times 0.2}{10^{-6}} = 270,000 \quad \text{Re}_{II}^{(1)} = \frac{1.3 \times 0.3}{10^{-6}} = 390,000$$

vi) Del diagrama de Moody se obtiene los siguientes factores de fricción:

$$f_I^{(2)} = 0.0185 \quad f_{II}^{(2)} = 0.0196 \quad f_{III}^{(2)} = 0.0179$$

Volviendo al paso iii) se calcula una nueva pérdida con estos factores:

$$H_p^{(2)} = 5.82 \text{ m}$$

iv) Las nuevas velocidades medias son:

$$U_I^{(2)} = 1.41 \text{ m/s} \quad U_{II}^{(2)} = 1.34 \text{ m/s} \quad U_{III}^{(2)} = 1.33 \text{ m/s}$$

v) Los nuevos números de Reynolds:

$$\text{Re}_I^{(2)} = 352,000 \quad \text{Re}_{II}^{(2)} = 268,000 \quad \text{Re}_{III}^{(2)} = 399,000$$

vi) Con los cuales se obtienen los siguientes factores de fricción:

$$f_I^{(3)} = 0.0186 \quad f_{II}^{(3)} = 0.0196 \quad f_{III}^{(3)} = 0.0178$$

Siendo estos valores prácticamente iguales a los anteriores, puede adoptarse como verdadera la pérdida calculada en último término

$$H_p \cong H_p^{(2)} = 5.82 \text{ m}$$

Los gastos en los tramos se obtienen por la ley de continuidad usando las últimas velocidad calculadas

$$Q_I = 1.41 \times \frac{\pi \times 0.25^2}{4} = 0.0692 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{II} = 1.34x \frac{\pi \times 0.2^2}{4} = 0.0421 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{III} = 1.33x \frac{\pi \times 0.3^2}{4} = 0.0940 \text{ m}^3/\text{s}$$

La suma de estos tres gastos da $0.205 \text{ m}^3/\text{s}$, valor que coincide con el gasto total establecido como dato.

b) La solución por la ecuación de Hazen-Williams simplemente requiere reemplazar los datos en la fórmula 5.28; para el acero galvanizado nuevo puede tomarse $C_H = 130$.

$$H_{fP} = \frac{10.68}{130^{1.85}} \left[\frac{0.205}{\frac{0.25^{2.62}}{780^{0.541}} + \frac{0.2^{2.62}}{645^{0.541}} + \frac{0.3^{2.62}}{1086^{0.541}}} \right]^{1.85} = 6.08 \text{ m}$$

Se invita al lector a completar la resolución del inciso calculando los gastos parciales.

5.3 Tubo equivalente

El método del *tubo equivalente* es una forma alternativa de resolver tubos en serie y en paralelo pero sobre todo es útil y prácticamente necesario para resolver combinaciones de tubos en serie y en paralelo, que es el tema del apartado siguiente. Simplemente consiste en reemplazar el arreglo por un tubo sencillo imaginario que descarga el mismo gasto con la misma pérdida.

Como se recordará, para un *arreglo en serie* es válida la ecuación 5.7

$$H_{fS} = \left(\sum_{k=1}^r a_k \right) Q_s^n$$

El tubo equivalente será de ecuación

$$H_{fS} = a_s Q_s^n \quad (5.29)$$

donde a_s es el coeficiente a de dicho tubo imaginario y su valor es en consecuencia

$$a_s = \sum_{k=1}^r a_k \quad (5.30)$$

Análogamente, para un *arreglo en paralelo*, de la ecuación 5.20 se puede deducir el valor del coeficiente b del tubo equivalente

$$b^P = \sum_{k=1}^T b_k \quad (5.31)$$

O bien, si se requiere calcular el coeficiente a , éste valdrá

$$a_P = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^T \frac{1}{a_k^{1/n}} \right)^n} \quad (5.32)$$

En las tablas 5.1 y 5.2 se presentan las fórmulas de los coeficientes a y b para tubo equivalente de arreglos en serie y en paralelo, evaluados por la fórmula de Darcy-Weisbach y la de Hazen-Williams.

Tabla 5.1
Tubo equivalente de un arreglo en serie
Fórmulas para obtener los coeficientes

	coeficiente a	coeficiente b
Ecuación general	$a_s = \sum_{k=1}^T a_k$	$b_s = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^T \frac{1}{b_k^{1/n}} \right)^n}$
Ecuación de Darcy-Weisbach	$a_s = \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{k=1}^T \left(\frac{fL/D + \Sigma K}{D^4} \right)_k$	$b_s = \frac{\pi \sqrt{g/8}}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{fL/D + \Sigma K}{D^4} \right)_k \right]^{1/2}}$
Ecuación de Darcy-Weisbach (con longitudes equivalentes)	$a_s = \frac{8}{\pi^2 g} \sum_{k=1}^T \left(\frac{fL_c}{D^5} \right)_k$	$b_s = \frac{\pi \sqrt{g/8}}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{fL_c}{D^5} \right)_k \right]^{1/2}}$
Ecuación de Hazen-Williams	$a_s = 10.68 \sum_{k=1}^T \left(\frac{L_c}{C_H^{1.85} D^{4.85}} \right)_k$	$b_s = \frac{0.278}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{L_c}{C_H^{1.85} D^{4.85}} \right)_k \right]^{0.541}}$

Tabla 5.1 (continuación)
Tubo equivalente de un arreglo en serie
Fórmulas para obtener los coeficientes

	coeficiente a	coeficiente b
Ecuación de Hazen-Williams	$a_s = 10.68 \sum_{k=1}^T \left(\frac{L_c}{C_H^{1.85} D^{4.85}} \right)^k$	$b_s = \frac{0.278}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{L_c}{C_H^{1.85} D^{4.85}} \right)^k \right]^{0.541}}$
Ecuación de Hazen-Williams (a coeficiente constante)	$a_s = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \sum_{k=1}^T \left(\frac{L_c}{D^{4.85}} \right)^k$	$b_s = \frac{0.278 C_H}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{L_c}{D^{4.85}} \right)^k \right]^{0.541}}$

Tabla 5.2
Tubo equivalente de un arreglo en paralelo
Fórmulas para obtener los coeficientes

	coeficiente a	coeficiente b
Ecuación general	$a_p = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^T \frac{1}{a_k^n} \right)^{1/n}}$	$b_p = \sum_{k=1}^T b_k$
Ecuación de Darcy-Weisbach	$a_p = \frac{8/\pi^2 g}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{D^2}{\sqrt{fL/D + \Sigma K}} \right)^k \right]^2}$	$b_p = \pi \sqrt{g/8} \sum_{k=1}^T \left(\frac{D^2}{\sqrt{fL/D + \Sigma K}} \right)^k$
Ecuación de Darcy-Weisbach (con longitudes equivalentes)	$a_p = \frac{8/\pi^2 g}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{D^{5/2}}{\sqrt{L_c}} \right)^k \right]^2}$	$b_p = \pi \sqrt{g/8} \sum_{k=1}^T \left(\frac{D^{3/2}}{\sqrt{L_c}} \right)^k$

Tabla 5.2 (continuación)
Tubo equivalente de un arreglo en paralelo
Fórmulas para obtener los coeficientes

	coeficiente a	coeficiente b
Ecuación de Hazen-Williams	$b_p = \frac{10.68}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{C_H' D^{2.62}}{L_c^{0.541}} \right)^k \right]^{1.85}}$	$b_p = 0.278 \sum_{k=1}^T \left(\frac{C_H D^{2.62}}{L_c^{0.541}} \right)^k$
Ecuación de Hazen-Williams (a coeficiente constante)	$a_p = \frac{10.68 / C_H^{1.85}}{\left[\sum_{k=1}^T \left(\frac{D^{2.62}}{L_c^{0.541}} \right)^k \right]^{1.85}}$	$b_p = 0.278 C_H \sum_{k=1}^T \left(\frac{D^{2.62}}{L_c^{0.541}} \right)^k$

Problema resuelto 5.4: Calcular los coeficientes de tubo equivalente para los siguientes casos y probar la validez del método.

- Para el ejemplo del problema resuelto 5.2.
- Para el problema resuelto 5.3.

Solución:

- Aplicando la fórmula de Darcy-Weisbach

$$a_s = \frac{8}{\pi^2 g} \left[\left(\frac{\frac{fL}{D} + \Sigma K}{D^4} \right)_I + \left(\frac{\frac{fL}{D} + \Sigma K}{D^4} \right)_{II} + \left(\frac{\frac{fL}{D} + \Sigma K}{D^4} \right)_{III} \right] =$$

$$a_s = \frac{8}{\pi^2 \times 9.8} \left[\frac{\frac{0.0163 \times 350}{0.15} + 3.5}{0.15^4} + \frac{\frac{0.0167 \times 400}{0.2} + 1.8}{0.2^4} + \frac{\frac{0.0163 \times 660}{0.15} + 2.9}{0.15^4} \right] = 20,800$$

Para demostrar la validez del método se calculará el gasto del arreglo con este coeficiente

$$Q_s = \left(\frac{H_f}{a_s} \right)^{1/n} = \sqrt[1.48]{\frac{10.3}{20,800}} = 0.0297 \text{ m}^3/\text{s}$$

Este valor coincide con el obtenido en la resolución del problema de referencia. Se hace notar al lector que en la fórmula para calcular a , se sustituyeron los valores correctos de los coeficientes f , extraídos de la resolución de aquel problema; normalmente dichos valores no se conocen por lo cual, en rigor, se requiere un proceso iterativo para conocer el coeficiente a , apoyándose en el diagrama de Moody.

b) En este inciso se utilizará la fórmula de Hazen-Williams, la expresión correspondiente para el cálculo de a_p es la siguiente

$$a_p = \frac{10.68}{C_H^{1.85} \left[\left(\frac{D}{L_c} \right)^{2.62} \right]_I + \left(\frac{D}{L_c} \right)^{2.62} \right]_{II} + \left(\frac{D}{L_c} \right)^{2.62} \right]_{III}}^{1.85}$$

$$a_p = \frac{10.68}{130^{1.85} \left(\frac{0.25^{2.62}}{780^{0.541}} + \frac{0.2^{2.62}}{645^{0.541}} + \frac{0.3^{2.62}}{1,086^{0.541}} \right)^{1.85}} = 114$$

La pérdida será entonces

$$H_p = a_p Q_p^{1.85} = 114 \times 0.205^{1.85} = 6.08 \text{ m}$$

lo cual comprueba la validez del método, ya que es el mismo valor obtenido anteriormente.

Otra forma de calcular los coeficientes a del tubo equivalente consiste en calcular inicialmente los coeficientes individuales y luego aplicar directamente las fórmulas 5.30 o 5.32. Este camino se adopta en los próximos problemas resueltos.

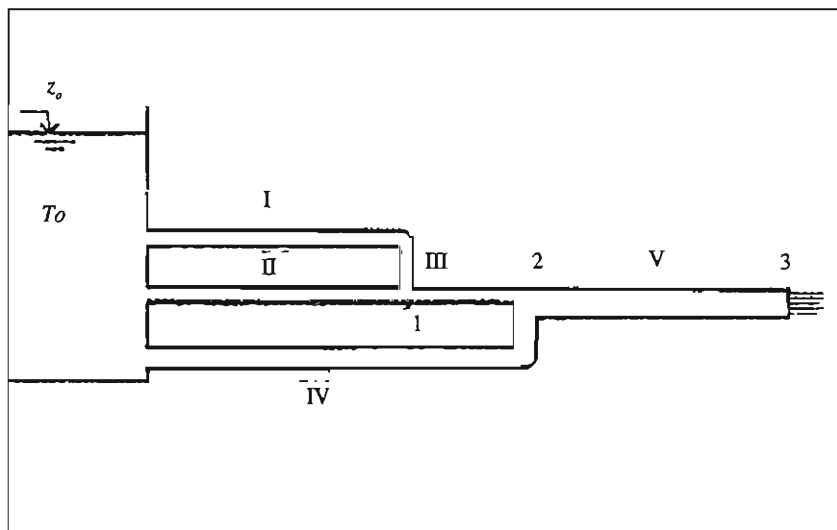


Figura 5.7: Problema resuelto 5.5.

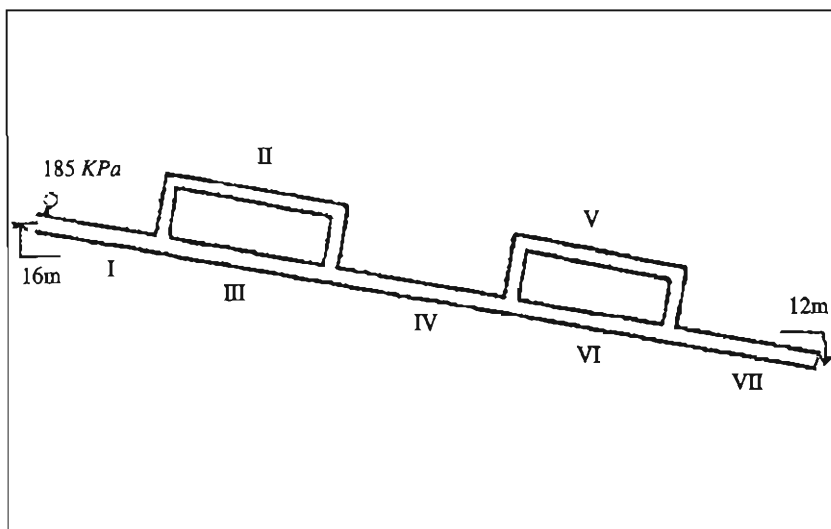


Figura 5.8: Problema resuelto 5.6.

5.4 Combinación de tubos en serie y en paralelo

La mejor forma de abordar este tema es mediante el análisis de ejemplos. Uno de ellos es el que se muestra en la figura 5.7; en la misma, el tubo I está en paralelo con el II pero a su vez el arreglo así formado está en serie con el tubo III; el conjunto de estos tres está en paralelo con el IV y finalmente todos ellos se encuentran en serie con el V. En este caso, así como en cualquier otro que pueda imaginarse, el problema es igualmente difícil sea la incógnita la pérdida o el gasto. El método del tubo equivalente permite ir reemplazando cada arreglo por un tubo imaginario hasta que finalmente queda un tubo singular que representa a toda la red.

Supóngase para el ejemplo de la figura que se conoce la pérdida total y se desea conocer el gasto total, así como la distribución de gastos y pérdidas en los tramos de la red. Entonces lo primer será calcular el coeficiente a del arreglo en paralelo que forman los tubos I y II (fórmula 5.32).

$$a_{II} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{a_I} \right) + \left(\frac{1}{a_{II}} \right) \right]^n}$$

con lo cual dicho arreglo quedó reemplazado por un tubo equivalente. Luego se calcula el coeficiente a del arreglo en serie que el mismo forma con el tubo III.

$$a_{(II)-(III)} = a_{II} + a_{III}$$

Estos a su vez forman un arreglo en paralelo con el tubo IV cuyo coeficiente es

$$a_{(I,II,III)/IV} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{a_{(I,II,III)}^{V_n}} \right) + \left(\frac{1}{a_{IV}^{V_n}} \right) \right]^{\frac{1}{n}}}$$

Finalmente se calcula el coeficiente a total del arreglo

$$a_t = a_{(I...IV)} \cdot v = a_{(I...IV)} + a_v$$

El gasto, que es la incógnita del problema, podrá calcularse como si se tratara de un tubo sencillo

$$Q_t = \left(\frac{H_f}{a_t} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Pero no es este el único resultado que puede obtenerse, *Desandando el camino*, por decirlo de alguna manera, se pueden calcular los gastos y pérdidas parciales en todos los tramos. Para ello es preciso hacer uso de los tres tipos de ecuaciones disponibles: la de *continuidad*, que se empleará para el balance de masa en los nudos, la de *conservación de la energía* y la de *resistencia al flujo* en los tramos². Para el ejemplo que se ha presentado, los pasos pueden ordenarse como sigue:

- El gasto total Q_t coincide con el del tramo V ya que a él confluyen todos los demás. *Conociendo el gasto en un tramo se puede conocer su pérdida y viceversa* empleando la ecuación de resistencia al flujo; en este caso

$$H_{fV} = a_V Q_t^n$$

- La pérdida total H_{ft} es la diferencia de energía entre el depósito T_o y la salida (nudo 3) y la pérdida H_{fV} lo es entre los nudos 2 y 3. La diferencia $H_{ft} - H_{fV}$ será por lo tanto igual a la caída de energía entre T_o y el nudo 2; simbólicamente

$$H_{ft} - H_{fV} = H_{O-3} - H_{2-3} = H_{O-2}$$

Pero a su vez este valor coincide con la pérdida H_{fIV} ya que ese tramo une directamente el tanque T_o con el nudo 2.

- Conociendo la pérdida, se puede calcular el gasto en el tramo IV

$$Q_{IV} = \left(\frac{H_{fIV}}{a_{IV}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

² En el próximo capítulo se hará un análisis detallado de estas ecuaciones.

- Ya se conoce el gasto que llega al nudo 2 por el tramo IV y el que sale de él por el tramo V; de manera que por diferencia se puede calcular el gasto Q_{III}

$$Q_{III} = Q_V - Q_{IV}$$

- Conociendo el gasto en el tramo III se procede a calcular su pérdida

$$H_{fIII} = a_{III} Q_{III}^n$$

- Nuevamente se está en condiciones de hacer un balance de energía entre nudos

$$H_{0-2} - H_{fIII} = H_{0-2} - H_{1-2} = H_{0-1}$$

El valor así calculado coincide con la pérdida de energía en el tramo I y por supuesto en el tramo II ya que ambos forman un arreglo en paralelo.

- Finalmente conociendo la pérdida es posible obtener el gasto en los tramos I y II.

$$Q_I = \left(\frac{H_{fI}}{a_I} \right)^{1/n}$$

$$Q_{II} = \left(\frac{H_{fII}}{a_{II}} \right)^{1/n}$$

- Todavía sale sobrando una ecuación, la cual puede usarse como prueba de cálculo. En efecto, debe cumplirse que...

$$Q_I + Q_{II} = Q_{III}$$

para que se verifique el balance de masa en el nudo 2.

Se resolverán algunos problemas.

Problema resuelto 5.5: Considérense los siguientes datos para el ejemplo de la figura 5.7.

Tramo	diámetro (mm)	longitud de cálculo (m)
I	100	280
II	75	126
III	150	445
IV	150	625
V	200	890

El material es acero galvanizado con cierto uso ($C_H = 125$) y la pérdida total es de 19.7 m. Calcular las pérdidas y gastos de cada tramo.

Solución: Por tratarse del mismo ejemplo que acaba de explicarse en este apartado, no se harán comentarios sino que simplemente se harán los reemplazos numéricos en las fórmulas. Previamente se calcularán los coeficientes a de todos los tramos

$$a_k = \frac{10.68}{125^{1.85}} \frac{L_{ck}}{D_k^{4.85}}$$

Efectuando los cálculos se obtiene los siguientes valores

a_k Tramo	I	II	III	IV	V
	28,000	50,800	6,220	8,730	3,080

$$a_{I,II} = \frac{1}{\left(\frac{1}{28,000^{0.541}} + \frac{1}{50,800^{0.541}} \right)^{1.85}} = 10.306$$

$$a_{(I,II)-III} = 10.306 + 6,220 = 16,526$$

$$a_{(I,II,III)-IV} = \frac{1}{\left(\frac{1}{16,526^{0.541}} + \frac{1}{8,730^{0.541}} \right)^{1.85}} = 3,268$$

$$a_t = 3,268 + 3,080 = 6,348$$

$$Q_t = \left(\frac{19.7}{6,348} \right)^{0.541} = 0.04396 \text{ m}^3/s$$

$$H_{fv} = 3,080 \times 0.04396^{1.85} = 9.51 \text{ m}$$

$$H_{fv} = 19.7 - 9.51 = 10.19 \text{ m}$$

$$Q_{IV} = \left(\frac{10.19}{8,730} \right)^{0.541} = 0.0259 \text{ m}^3/s$$

$$Q_{III} = 0.04396 - 0.0259 = 0.01806 \text{ m}^3/s$$

$$H_{III} = 6,220 \times 0.01806^{1.85} = 3.70 \text{ m}$$

$$H_{II} = H_{II} = 10.19 - 3.70 = 6.39 \text{ m}$$

$$Q_I = \left(\frac{6.49}{28,000} \right)^{0.541} = 0.108 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{II} = \left(\frac{6.49}{50,800} \right)^{0.541} = 0.0078 \text{ m}^3/\text{s}$$

La suma de estos dos últimos gastos es de $0.0186 \text{ m}^3/\text{s}$, valor que difiere poco del calculado para Q_{III}

Problema resuelto 5.6: La figura 5.8 muestra una conducción de agua en fierro fundido usado. Para mejorar la capacidad de descarga de la misma, se instalaron dos tramos que operan como *by-pass*, que son los indicados como II y V ¿En qué porcentaje aumenta el gasto por efecto de este recurso?

Las dimensiones de los tubos son las siguientes:

Tramo	diámetro (mm)	longitud de cálculo (m)
I, III, IV, VI y VII	250	300
II y V	200	320

Solución: Para el fierro fundido usado se toma $C_H = 110$. La pérdida total se obtiene por la ecuación de la energía, entre los nudos 1 y 6

$$H_{ft} = (z_1 + P_{V1}) - z_6 = 16 + \frac{185,000}{9,800} - 12 = 22.88 \text{ m}$$

Los coeficientes a de los tramos son:

$$\text{Tramos I, III, IV, VI y VII } a = \frac{10.68}{110^{1.85}} \frac{300}{0.25^{4.85}} = 446$$

$$\text{Tramos II y V } a = \frac{10.68}{110^{1.85}} \frac{320}{0.2^{4.85}} = 1,400$$

La conducción original (sin *by-passes*) está formada sólo por la tubería troncal, cuyo coeficiente a_{or} puede obtenerse como el de un arreglo de 4 tubos en serie

$$a_{or} = a_I + a_{III} + a_{IV} + a_{VI} + a_{VII} = 5 \times 446 = 2,230$$

De manera que el gasto original Q_{or} será

$$Q_{or} = \left(\frac{H_{ft}}{a_{or}} \right)^{1/a} = \left(\frac{22.88}{2,230} \right)^{0.541} = 0.0840 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para calcular el gasto modificado por la instalación de los *by-passes*, es necesario tratar el problema como una combinación de tubos en serie y en paralelo. A continuación se calculan los coeficientes de los tubos equivalentes

$$a_{v_{II}} = a_{v_{VI}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{446^{0.541}} + \frac{1}{1,400^{0.541}} \right)^{1.85}} = 202$$

$$a_{mod.} = a_I + a_{v_{II}} + a_{IV} + a_{v_{VI}} + a_{v_{VII}} = 3 \times 446 + 2 \times 202 = 1,742$$

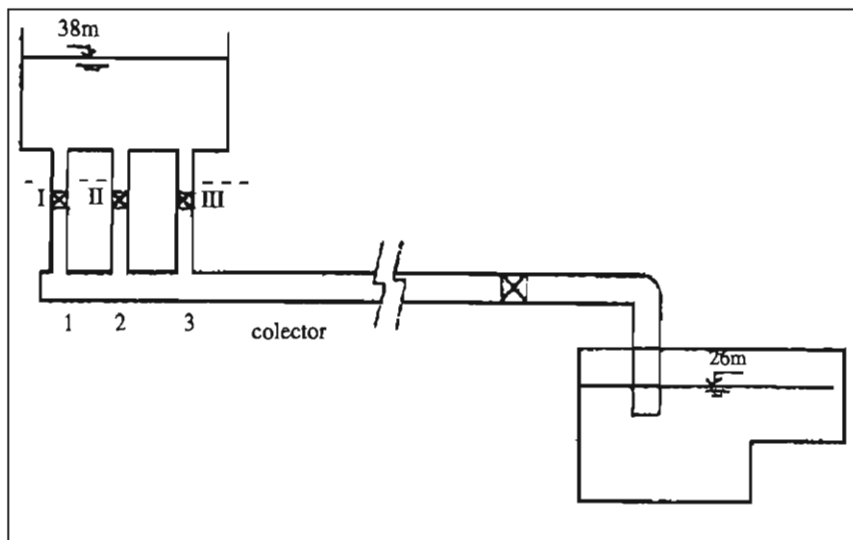
El gasto $Q_{mod.}$ es

$$Q_{mod.} = \left(\frac{H_f}{a_{mod.}} \right)^{1/n} = \left(\frac{22.88}{1,742} \right)^{0.541} = 0.0960 \text{ m}^3/\text{s}$$

El incremento porcentual del gasto por efecto de los by-passes es

$$\frac{Q_{mod.} - Q_{or.}}{Q_{or.}} = \frac{0.096 - 0.084}{0.084} = 0.140 = 14\%$$

Problema resuelto 5.7: El tanque de laboratorio T_o de la figura 5.9.a descarga por un múltiple formado por los tubos I, II y III, de 75 mm de diámetro y 10 m de longitud cada uno, los cuales se unen en el colector IV de 200 mm de diámetro y 118 m de longitud; todos los tubos son de acero soldado nuevo. Este diseño permite regular el gasto en función de la cantidad de tubos del múltiple que estén funcionando; la regulación fina se hace con las válvulas de compuerta V_1 , V_2 , V_3 o V_4 . Si el gasto requerido en el canal de ensayos es de 80 l/s ¿Cuántos tubos es preciso abrir como mínimo?



a)

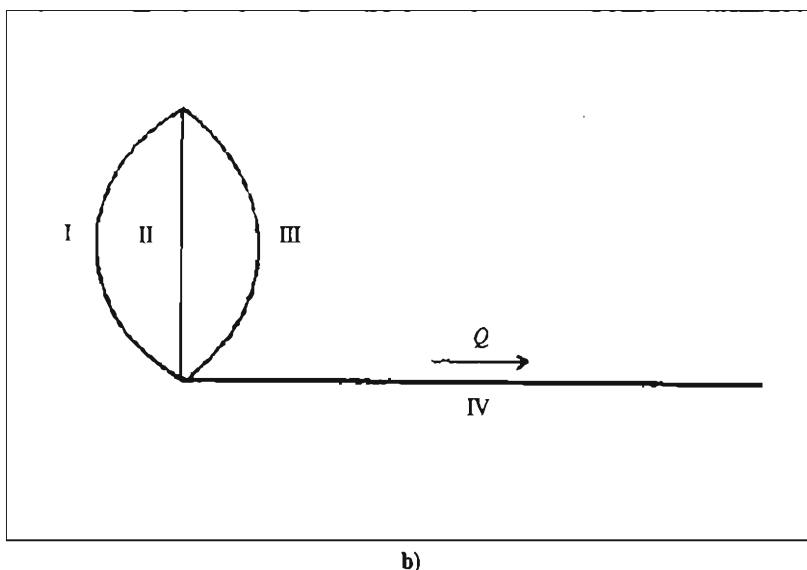


Figura 5.9: Problema resuelto 5.7 a) Esquema. b) Módulo adoptado.

Solución: A veces es conveniente hacer algunas simplificaciones a fin de que un problema pueda ser interpretado por un modelo sencillo, cuyos resultados sean aceptablemente aproximados. Este es uno de esos casos; en efecto, los nudos 1, 2 y 3 están muy próximos, la distancia que los separa es insignificante comparada con los 118 m de longitud del colector; de manera que puede aceptarse que los tubos I, II y III convergen a un único nudo como se muestra en la parte b de la figura. De esta manera el análisis se simplifica considerablemente, ya que el caso se reduce a tres tubos en paralelo que a su vez están en serie con el colector. Como es habitual, se calcularán los coeficientes a de los tramos.

Tramos I, II y III: Se requiere calcular la longitud de cálculo, para lo cual se deben tener en cuenta los accesorios, que en este caso son tres: la entrada, una válvula de compuerta abierta y un accesorio T, que para el caso puede considerarse como una salida, ya que es fácil aceptar que se disipa la energía cinética en esa unión. De acuerdo a las referencias del capítulo 3:

$$K_{\text{ent.}} = 0.5 \quad K_{\text{v.c.a.}} = 0.27 \quad K_T = 1$$

La suma de longitudes equivalentes por estos accesorios en cada tramo es (fórmula 4.16):

$$\Sigma L_e = \frac{\Sigma K C_H^{1.85} D^{1.15}}{120} = \frac{(0.5 + 0.27 + 1) \times 130^{1.85} \times 0.075^{1.15}}{120} = 6.11 \text{ m}$$

La longitud de cálculo es $L_c = L + \Sigma L_e = 10 + 6.1 = 16.1 \text{ m}$

El coeficiente a

$$a = \frac{10.68}{130^{1.85}} \frac{16.1}{0.075^{4.85}} = 6,033$$

Colector: Sus accesorios son: una válvula de compuerta abierta, un codo normal a 90° y la salida

$$K_{v.c.a.} = 0.07 \quad K_{co.} = 0.33 \quad K_{sal.} = 1$$

$$\Sigma L_e = \frac{(0.07 + 0.33 + 1) \times 130^{1.85} \times 0.2^{1.15}}{120} = 14.9 \text{ m}$$

$$L_c = 118 + 14.9 = 132.9 \text{ m}$$

$$a = \frac{10.68}{130^{1.85}} \frac{132.9}{0.2^{4.85}} = 428$$

Para resolver qué cantidad de tubos del múltiple es necesario poner en servicio, es necesario hacer varias hipótesis: La primera sería suponer un solo tubo abierto y los otros dos cerrados, la segunda es suponer dos tubos abiertos y la tercera es la de tres tubos abiertos; aquella que cumpla mínimamente con la condición de abastecer 80 l/s al canal es la respuesta del problema.

Un tubo abierto: Este caso es simplemente el de dos tubos en serie

$$a_{I-IV} = a_I + a_{IV} = 6,033 + 428 = 6,461$$

La pérdida total es la diferencia de nivel entre el tanque y el canal

$$H_p = 38 - 12 = 26 \text{ m}$$

El gasto para esta hipótesis será:

$$Q_I = \left(\frac{26}{6,461} \right)^{0.541} = 0.0506 \text{ m}^3/\text{s}$$

No es suficiente para las necesidades del canal, por lo tanto se probará la segunda hipótesis:

Dos tubos abiertos: Ahora se trata de dos tubos en paralelo en serie con el colector

$$a_{II} = \frac{1}{\left(\frac{1}{6,461^{0.541}} + \frac{1}{6,461^{0.541}} \right)^{1.05}} = 1,805$$

$$a_I = a_{II} + a_{IV} = 1,805 + 428 = 2,233$$

El gasto será

$$Q_t = \left(\frac{26}{2,233} \right)^{0.541} = 0.090 \text{ m}^3/\text{s}$$

Este gasto sí es suficiente para abastecer al canal, de manera que la respuesta al problema es que se necesitan dos tubos abiertos.

Problema resuelto 5.8: La tubería de la figura 5.10 es de asbesto-cemento y las dimensiones de los tubos son las siguientes

Tramo	diámetro (mm)	longitud de cálculo (m)
I	100	270
II	100	600
III	150	450
IV	200	580

- a) ¿Cuánto debe marcar el manómetro ubicado en el nudo 3 si el gasto que fluye es de 28 l/s?
 b) ¿Cuál es el máximo valor que puede adoptar la elevación del nudo 1 si la presión en él no puede ser menor que -9 m a fin de evitar la cavitación?

Solución: Para variar, se resolverá este problema por la fórmula de Darcy-Weisbach. La rugosidad del asbesto-cemento es de 0.025 mm y la viscosidad del agua a temperatura ambiente es de $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Si bien esto implica un tedioso proceso iterativo, con un poco de experiencia se pueden predecir los valores correctos de los factores de fricción.

Según puede observar el lector, la definición del nudo 1 no es necesaria ya que los tubos I y II poseen las mismas características; sin embargo en este caso es conveniente considerarlo ya que el inciso b) del problema hace referencia específica al mismo.

- a) Aplicando la ecuación de la energía entre el depósito T_0 y la sección 3, se obtiene

$$z_0 - (z_3 + P_3/\gamma) = H_f$$

de donde se despeja

$$P_3 = \gamma (z_0 - z_3 - H_f)$$

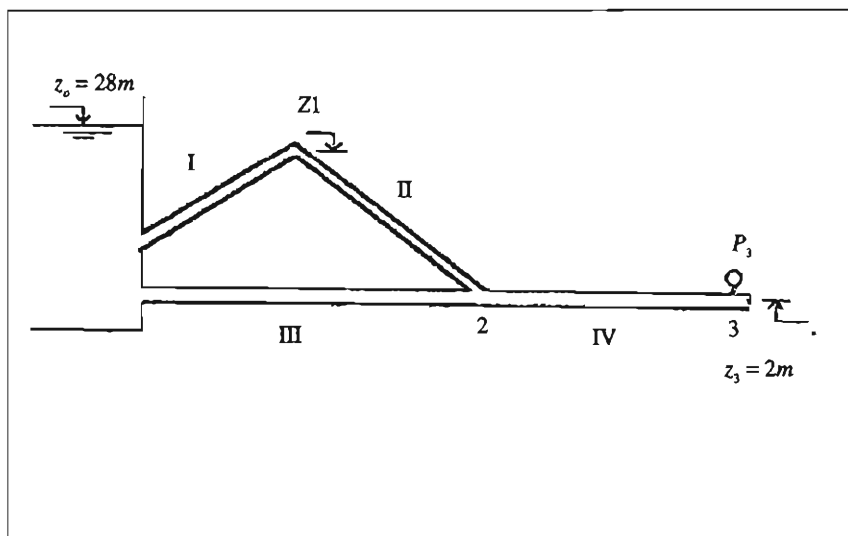


Figura 5.10: Problema resuelto 5.8.

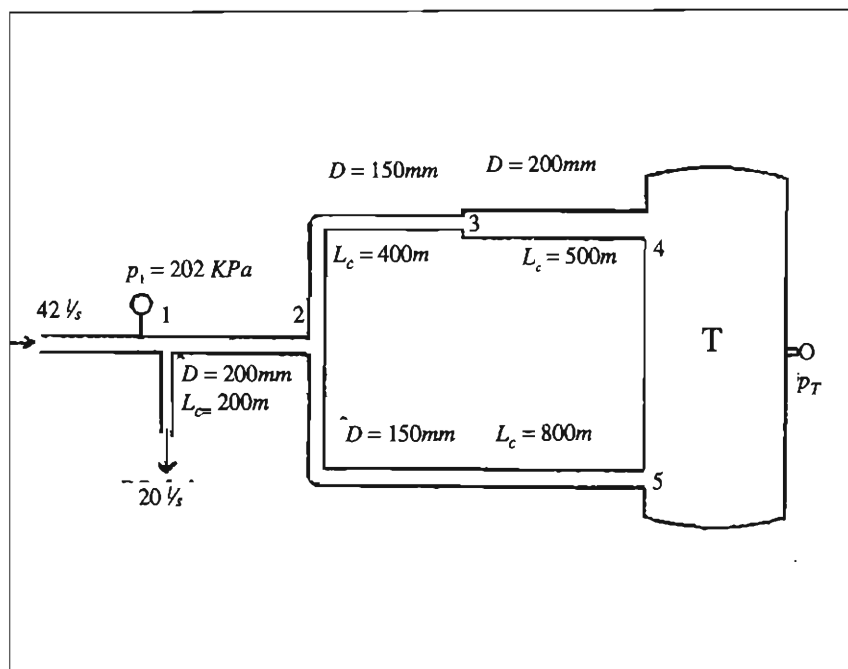


Figura 5.11: Problema resuelto 5.9.

Por lo tanto deberá obtenerse la pérdida total H_f . Se empieza por calcular los coeficientes a de los tramos. Al respecto el tramo IV posee una ventaja sobre los demás: en él se conoce el gasto y por lo tanto puede determinarse con precisión el factor de fricción. La rugosidad relativa del tramo IV es

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.025}{200} = 0.000125$$

Su velocidad media

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.028}{\pi \times 0.2^2} = 0.89 \text{ m/s}$$

Su número de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{0.89 \times 0.2}{10^{-6}} = 178,000$$

Su factor de fricción, extraído del diagrama de Moody es

$$f = 0.017$$

Finalmente el coeficiente a de dicho tramo es

$$a_{IV} = \frac{8f}{\pi^2 g} \frac{L_c}{D^5} = \frac{8 \times 0.017 \times 580}{\pi^2 \times 9.8 \times 0.2^5} = 2,550$$

Para los demás tramos es preciso adoptar un factor de fricción aproximado:

El tramo I posee rugosidad relativa $\varepsilon/D = \frac{0.025}{100} = 0.00025$; se adopta entonces $f = 0.0185$; el coeficiente a resulta

$$a_I = \frac{8 \times 0.0185 \times 270}{\pi^2 \times 9.8 \times 0.1^5} = 41,350$$

El tramo II posee las mismas características que el anterior, por lo tanto tendrá el mismo factor de fricción; sin embargo el coeficiente a será diferente porque varía su longitud de cálculo

$$a_{II} = \frac{8 \times 0.0185 \times 600}{\pi^2 \times 9.8 \times 0.1^5} = 91,800$$

Finalmente para el tramo III la rugosidad relativa es $\varepsilon/D = 0.000167$; se adopta un factor de fricción $f = 0.018$

$$a_{III} = \frac{8 \times 0.018 \times 450}{\pi^2 \times 9.8 \times 0.15^5} = 8,820$$

A continuación se calcula el coeficiente del tubo equivalente

$$a_{I-II} = a_I + a_{II} = 41,350 + 91,800 = 133,100$$

$$a_{(I+II+III)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{133,100}} + \frac{1}{\sqrt{8,820}} \right)^2} = 5,580$$

$$a_i = a_{(I+II+III)} + a_{IV} = 5,580 + 2,550 = 8,130$$

Con lo cual se puede calcular la pérdida total del arreglo

$$H_{ft} = a_i Q_i^n = 8,130 \times 0.028^2 = 6.37m$$

Para confirmar este resultado faltaría verificar si los factores de fricción supuestos para los tramos I a III son correctos. Para ello es necesario calcular los gastos, velocidades y números de Reynolds en los mismos. El resultado, de una segunda iteración, la cual se deja como ejercicio al lector, es

Tramo	factor de fricción	coeficiente a
I	0.0205	45,800
II	0.0205	101,700
III	0.0017	8,330

Con los cuales se obtiene una pérdida $H_{ft} = 6.26m$

Este valor difiere del anterior en menos del 2 %; con ejercicios como este el lector puede ir formando criterio respecto de la necesidad de hacer nuevas iteraciones.

Reemplazando en la expresión 5.33

$$P_3 = 9,800 (28 - 2 - 6.26) = 193,000 = 193 \text{ kPa}$$

b) Aplicando la ecuación de energía entre el tanque T_o y el nudo 1

$$z_o - (z_1 + P_{V_1}) = H_{f1}$$

Se tiene como dato la presión en 1 pero no en unidades de presión sino en metros de columna líquida: $P_{V_1} = -9m$. De la anterior se despeja la incógnita que es la elevación z_1

$$z_1 = z_o - P_{V_1} - H_{f1} \quad (5.34)$$

Por lo tanto debe calcularse la pérdida en el tramo I. Esto requiere a su vez algunos cálculos previos de pérdidas y gastos en la red, de los cuales hasta ahora sólo se conocen los totales.

- El gasto total coincide con el del tramo IV, por lo tanto puede calcularse su pérdida

$$H_{fV} = a_{fV} Q_V^5 = 2,550 \times 0.028^2 = 2.00m$$

- La pérdida entre el tanque y el nudo 2 es igual a la pérdida total menos la del tramo IV

$$H_{1-2} = H_t - H_{fV} = 6.26 - 2 = 4.26m$$

- A su vez este valor coincide con la pérdida en el arreglo en serie I-II, por lo tanto es fácil conocer el gasto en el mismo

$$Q_{I-II} = \sqrt{\frac{H_{1-2}}{a_{I-II}}} = \sqrt{\frac{4.26}{45,800 + 101,700}} = 0.00587m^3/s$$

- El gasto de un arreglo en serie es igual a los gastos individuales, por lo tanto se conoce el gasto en el tramo I y se puede calcular su pérdida

$$H_{fI} = a_I Q_I^5 = 45,800 \times 0.00537^2 = 1.32m$$

Reemplazando en la 5.34

$$z_1 = 28 - (-9) - 1.32 = 35.68m$$

Es decir que el nudo 1 no puede tener una elevación mayor que ésta, porque de lo contrario la presión descenderá hasta provocar la cavitación en esa sección.

Problema resuelto 5.9: La figura 5.11 es la vista superior de una red que conduce agua temperatura ambiente; todos sus tramos ocupan la misma posición horizontal y el material es acero comercial nuevo.

- ¿Cuánto debe valer la presión en el tanque cerrado T?
- ¿Cuánto vale el gasto en el tramo 2-5?
- Si el tramo 2-4 fuera de diámetro constante ¿cuánto debería valer éste para mantener la misma distribución de gastos?

Solución: Se tomará para el acero comercial un coeficiente $C_H = 130$.

- Se aplicará la ecuación de la energía entre el nudo 1 y el tanque T

$$(z_1 + P_{v_1}) - (z_T + P_{v_T}) = H_{fT}$$

Siendo la red horizontal, la diferencia $(z_1 - z_T)$ es nula por lo tanto:

$$H_{fT} = \frac{P_1 - P_T}{\gamma}$$

de donde se despeja la incógnita de este inciso

$$P_T = P_1 - \gamma H_f$$

El gasto que circula del nudo 1 al tanque T se puede obtener fácilmente por balance de masa en el nudo 1

$$Q_{1-2} = 42 - 20 = 22 \text{ l/s}$$

Se calculan los coeficientes a de los tramos empleados la fórmula de Hazen-Williams

$$a_k = \frac{10.68}{130^{1.85}} \frac{L_{ck}}{D_k^{4.85}}$$

Tramo	coeficiente a
1-2	644
2-3	5,197
3-4	1,610
2-5	10400

A continuación se calculan los coeficientes de tubo equivalente

$$a_{2-4} = 5,197 + 1,610 = 6,807$$

$$a_{2-T} = a_{(2-4)(2-5)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{6,807^{0.541}} + \frac{1}{10,400^{0.541}} \right)^{1.85}} = 2,324$$

$$a_t = 644 + 2,324 = 2,968$$

La pérdida se calcula como

$$H_f = a_t Q_t^{1.85} = 2,968 \times 0.022^{1.85} = 2.56 \text{ m}$$

Se reemplaza en la 5.35 este valor así como la presión P_1 que se lee como dato en la figura

$$P_T = 202,000 - 9800 \times 2.56 = 176,900 \text{ Pa} \approx 177 \text{ kPa}$$

b) Para conocer el gasto en el tramo 2-5 se calcula primero la pérdida en dicho tramo por balance de energía

$$H_{2-5} = H_t - H_{1-2}$$

Pero previamente debe calcularse $H_{1,2}$

$$H_{1-2} = a_{1-2} Q_{1-2}^n = 644 \times 0.022^{1.85} = 0.55m$$

Reemplazando en la anterior

$$H_{2-5} = 2.56 - 0.55 = 2.01m$$

El gasto será

$$Q_{2-5} = \left(\frac{2.01}{10.400} \right)^{0.541} = 0.0098m^{3/4}$$

c) Para responder esta pregunta simplemente debe despejarse el diámetro de la ecuación 5.36, considerando que su longitud de cálculo es de $400 + 500 = 900m$ y que el coeficiente a es el correspondiente al arreglo en serie (2-3) - (3-4)

$$d_{2-4} = 0.254 \left(\frac{L_{c\ 2-4}}{a_{2-4}} \right)^{0.206} = 0.254 \left(\frac{900}{6,807} \right)^{0.206} = 0.167m$$

Si el lector analiza un poco lo que se ha hecho, comprenderá que un diámetro con este valor podrá conducir el mismo gasto con la misma pérdida que el arreglo, pues arroja el mismo coeficiente a que éste. Como era de esperar, dicho diámetro es un valor intermedio entre los dos que forman el arreglo en serie.

Resumen del capítulo

- * Un arreglo de tubos en serie es un conjunto de tramos de características físicas diversas alineados en la misma conducción. Como consecuencia de esto, el gasto es el mismo en todos los tubos y la pérdida total es igual a la suma de las pérdidas parciales.
- * Si la incógnita en un arreglo en serie es la pérdida, el cálculo puede realizarse tubo por tubo, en cambio si es el gasto se requiere de una fórmula especial.
- * Un arreglo en paralelo es un conjunto de tubos que partiendo de un nudo vuelven a reunirse en un segundo nudo. Como resultado el gasto del arreglo es igual a la suma de los gastos parciales y la pérdida del arreglo es igual a las pérdidas individuales.
- * Si la incógnita en un arreglo en paralelo es el gasto, el cálculo puede hacerse para cada tubo en forma individual; en cambio si se requiere conocer la pérdida se debe usar un procedimiento especial, el cual además permite conocer la distribución del gasto entre los tramos del arreglo.
- * El método del tubo equivalente es un recurso para calcular un arreglo en serie o en paralelo como si se tratara de un tubo singular.
- * La principal utilidad del método del tubo equivalente es el cálculo de redes de tubería que surgen como combinación de arreglos en serie y en paralelo, lo cual permite reducir la red completa a un único tubo ficticio; posteriormente es relativamente fácil calcular las pérdidas y gastos de todos los tramos.

Problemas propuestos

5.1 La figura 5.12 representa una bomba con motor sumergido que extrae agua de un pozo y que la impulsa hasta un tanque elevado T_f . La elevación z_0 es el nivel dinámico del acuífero, en otras palabras la energía a la entrada de la bomba. El tramo vertical 1-2 es de acero galvanizado de 8" su longitud es de 22 m; sus accesorios son un codo normal a 90° y una expansión brusca. El tramo exterior al pozo es de asbesto-cemento de 10" y su longitud es de 650 m; sus accesorios son: una válvula de compuerta abierta, una válvula antirretorno de obturador oscilante y la salida. Calcular el gasto si la carga de la bomba es de 50 m.

5.2 Resolver el problema anterior con los mismos datos excepto que el motor está en superficie en lugar de estar sumergido. Por lo tanto el tramo vertical de la conducción será de sección anular pues por él debe descender la flecha de la bomba. Supóngase para el caso que el diámetro de este tubo es de 10" y el exterior de la flecha es de 2" (Despreciar pérdidas por efecto de juntas en la flecha).

5.3 En una conducción de fierro fundido nuevo de 150 mm de diámetro y 1,800 m de longitud el frotamiento es de 40 p/s. Con el objeto de reducirla a 30 l/s se decide reemplazar un segmento de la conducción por un tramo del mismo material pero de 75 mm de diámetro. ¿Qué longitud se requiere para dicho tramo?

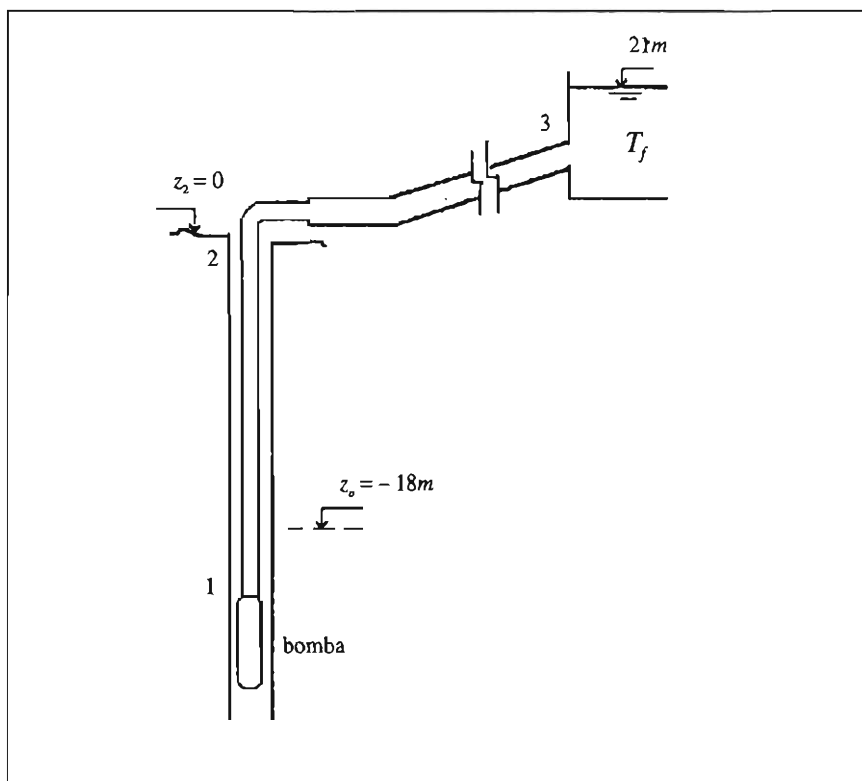


Figura 5.12: Problema resuelto 5.1 y 5.2.

5.4 Un sistema de dos tubos en paralelo, de acero galvanizado usado conduce un gasto de 85 l/s. El tubo I es de 200 mm de diámetro y ambos (I y II) poseen una longitud de cálculo de 850 m. Elaborar una tabla con los siguientes encabezados: D_{II} , Q_I , Q_{II} y Q_I/Q_{II} y llenarla para $D_{II} = 200$ mm, 150 mm y 100 mm.

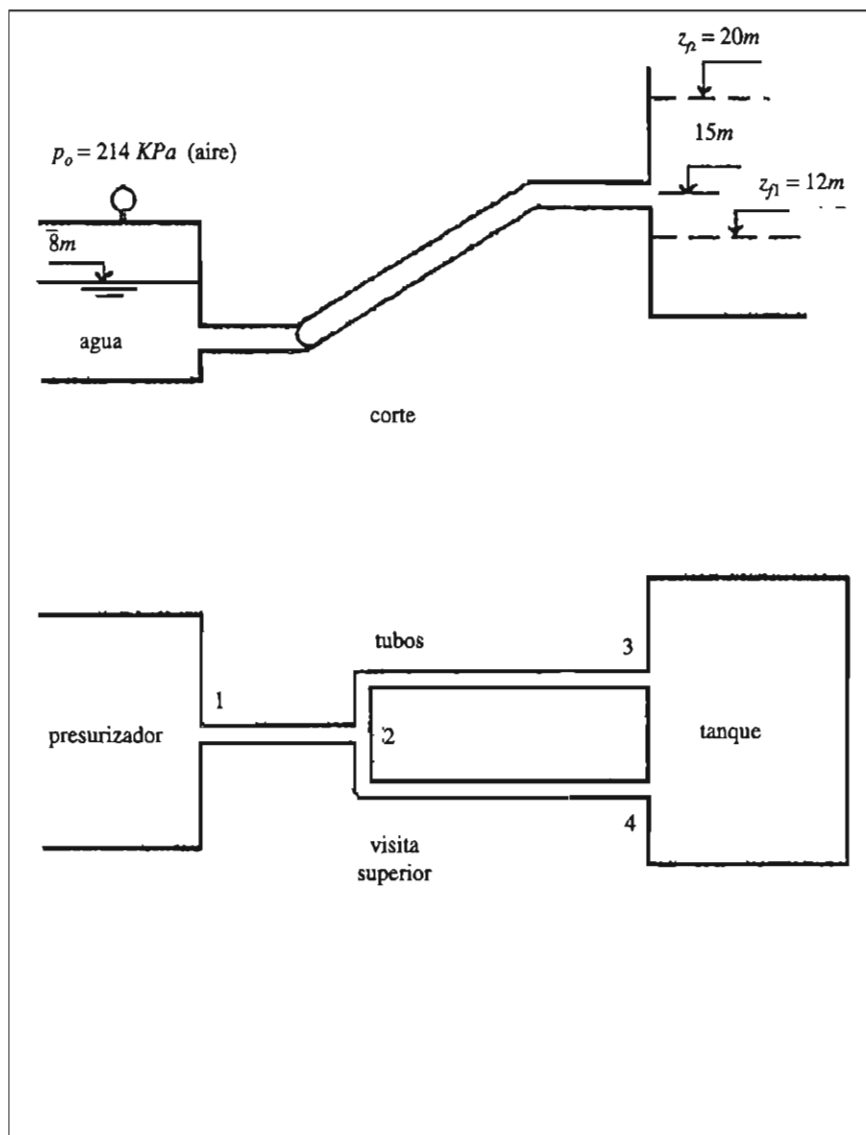


Figura 5.13: Problema propuesto 5.7.

5.5 Resolver nuevamente el problema resuelto 5.3 pero suponiendo que los tubos tienen rugosidades diferentes: $\epsilon_I = 0.15 \text{ mm}$, $\epsilon_{II} = 0.03 \text{ mm}$ y $\epsilon_{III} = 0.05 \text{ mm}$.

5.6 En un arreglo de dos tubos de PVC en paralelo el gasto es de 250 l/s. El tubo I es de 300 mm de diámetro y su longitud de cálculo es de 580 m. El tubo II es de 350 mm de diámetro ¿qué longitud de cálculo debe poseer para que el gasto sea el mismo por ambos tramos?

5.7 El presurizador de la figura 5.13 se emplea para llenar el tanque de la derecha; se usa para ello un sistema de tuberías de acero galvanizado con las siguientes dimensiones:

ramo	diámetro (mm)	longitud (m)
1-2	100	100
2-3	100	140
2-4	75	140

Las longitudes equivalentes por pérdidas secundarias resultan en cada tramo un 6% de la longitud real

a) ¿Cuál es el tiempo Δt que tarda en llenarse el tanque de la derecha hasta el nivel z_1 si hasta el mismo el volumen es de 180 m^3 ?

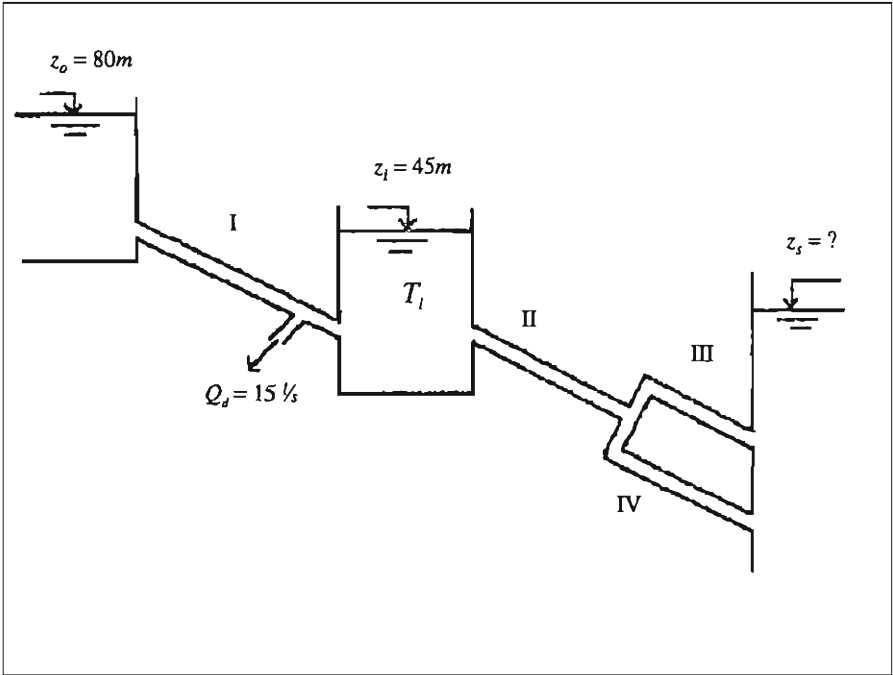


Figura 5.14: Problema propuesto 5.8.

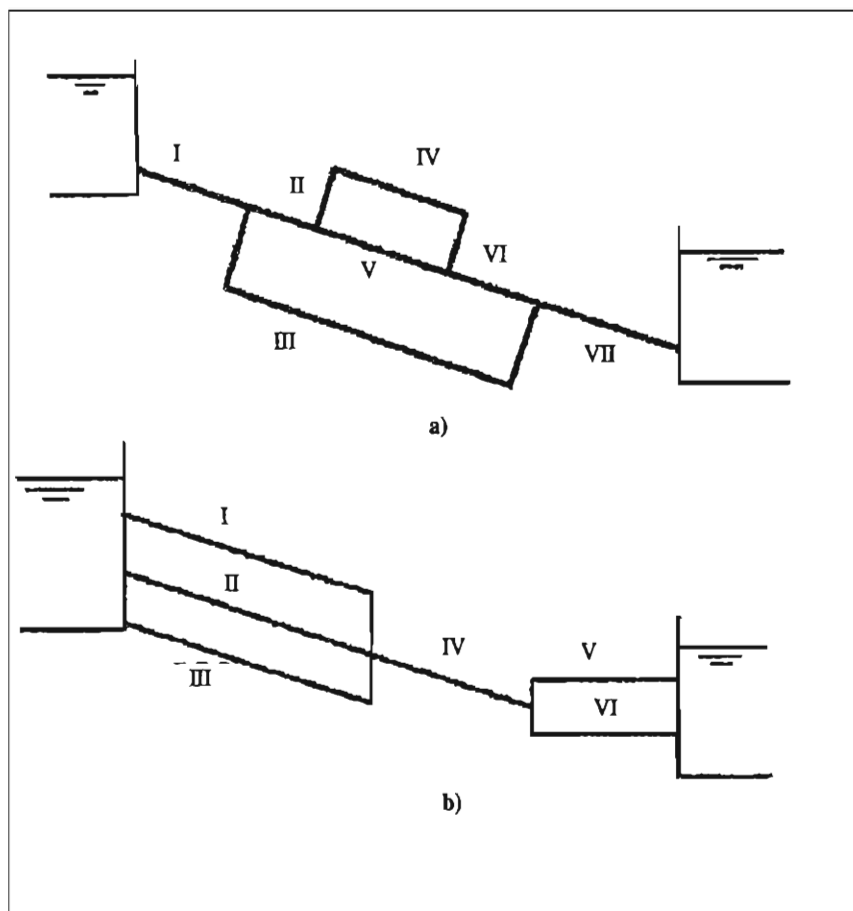


Figura 5.15: Problema propuesto 5.9.

b) Cuando el nivel de agua llega a z_a el volumen líquido en el tanque es de 360 m^3 . El tiempo que tarda en completarse el mismo es... $d = 2\Delta t$ (el Δt calculado en el inciso anterior) ¿menor que $2\Delta t$? ¿o mayor que $2\Delta t$? Justificar la respuesta.

5.8 La tubería de la figura 5.14 es de acero soldado usado y el diámetro es de 200 mm. La derivación Q_d se produce a corta distancia antes de llegar al tanque T_i . Las longitudes de los tramos son: $L_I = 1,400 \text{ m}$, $L_{II} = 1,000 \text{ m}$, $L_{III} = 900 \text{ m}$ y $L_{IV} = 1,050 \text{ m}$. ¿Cuánto debe valer z_3 para que el nivel z_i permanezca invariable? Despreciar pérdidas secundarias.

5.9 Explique el procedimiento para calcular el coeficiente a del tubo equivalente de los arreglos que se esquematizan en la figura 5.15.

5.10 La tubería de acero comercial de la figura 5.16 transporta 8.5 l/s de aceite de 880 kg/m^3 de densidad a una temperatura tal que su viscosidad cinemática es $\nu = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Las dimensiones de los tubos

son: $D_I = 75 \text{ mm}$, $L_I = 200 \text{ m}$, $D_{II} = 100 \text{ mm}$, $L_{II} = 600 \text{ m}$. ¿Cuál será la presión de MPa del depósito de la derecha (situado a la misma elevación que el de la izquierda) si se dispone de una bomba de 4 HP con una eficiencia del 55% para mejorar la descarga? Despreciar toda pérdida secundaria.

5.11 ¿Qué presión se requiere en el punto 1 del arreglo de la figura 5.17 montado en tubería de PVC? El tramo I es de 2" y 200 m de longitud de cálculo. Los tramos II a VII son de 1/2" y de 80 m de longitud de cálculo. El gasto total es de 4 l/s; el sistema es horizontal y la descarga es a la atmósfera (Puede suponerse que el nudo 2 es el punto de unión de todos los tubos por ser el múltiple de corta longitud y diámetro grande).

5.12 Dos tanques cuya elevación es $z_1 = z_2 = 2,285 \text{ m}$, abastecen de agua a una colonia de 6,600 habitantes (Figura 5.18), para los cuales se requiere una dotación de 150 litros por habitante y por día. El diámetro interno de la tubería es de 4", el material es asbesto-cemento y las longitudes de cálculo son: $L_I = 640 \text{ m}$, $L_{II} = 500 \text{ m}$ y $L_{III} = 700 \text{ m}$.

a) ¿Cuánto valdrá la presión a la entrada de la colonia, cuya elevación es $z_4 = 2,223 \text{ m}$ cuando se conduzca el gasto promedio?

b) ¿Cómo se distribuirá dicho gasto entre los tubos I y II?

5.13 Trazar el diagrama de energía para los ejemplos de los problemas 5.10 y 5.12.

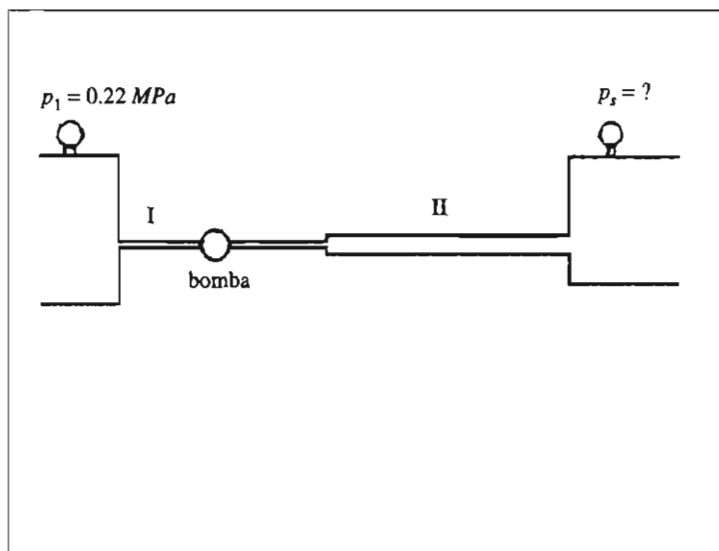


Figura 5.16: Problema propuesto 5.10.

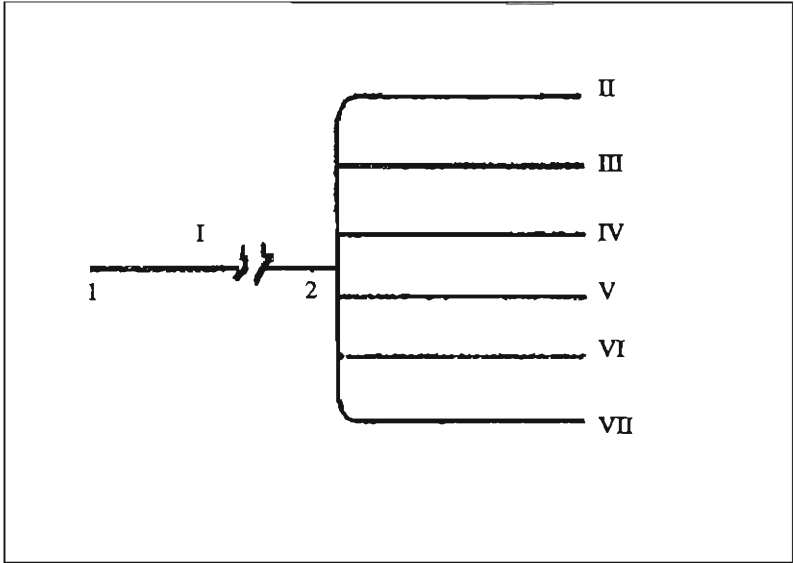


Figura 5.17: Problema propuesto 5.11.

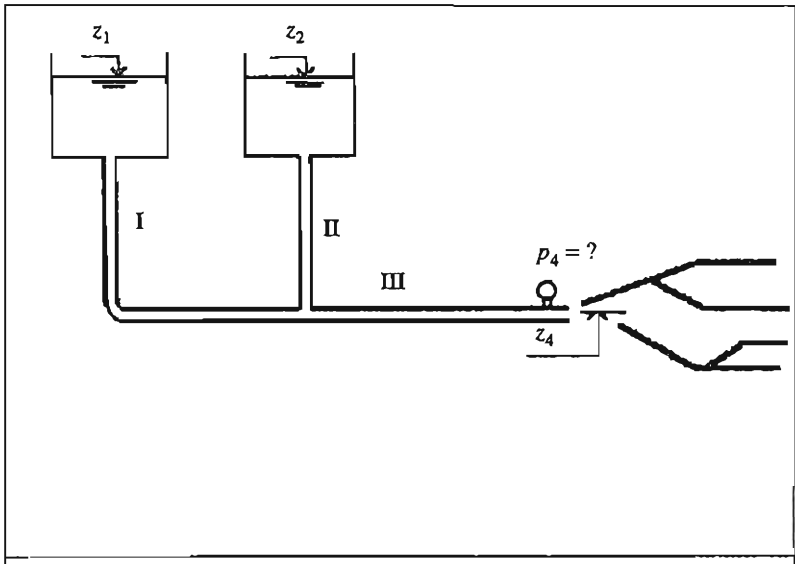


Figura 5.18: Problema propuesto 5.12.

6. REDES

6. REDES

- 6.1 Elementos componentes de una red de tubos a presión
- 6.2 Sistema de ecuaciones
 - 6.2.1 Ecuaciones de tramo
 - 6.2.2 Ecuaciones de nudo
 - 6.2.3 Ecuaciones de circuito
- 6.3 Planteo del problema
- 6.4 El problema de los tres depósitos
- 6.5 Resolución de redes abiertas
- 6.6 Resolución de redes cerradas. El método de Hardy Cross
- 6.7 Otros métodos de resolución de redes
 - 6.7.1 Clasificación de los métodos
 - 6.7.2 Técnicas de optimización
 - 6.7.3 Análisis comparativo

6.1 Elementos componentes de una red de tubos a presión

En el capítulo anterior se han llegado a ver casos bastante complejos de combinaciones de tubos. Sin embargo el problema puede complicarse aún más y de hecho así ocurre en la práctica; simplemente supóngase que el arreglo tiene varias entradas o salidas; tal situación no puede reducirse a un tubo equivalente. Las figuras 6.1, 6.3, 6.4 y 6.14 muestran varios casos de asociaciones arbitrarias de tramos de tubería que en general reciben el nombre de *redes de tubos a presión*.

Para aproximarse al análisis del problema se empezará por distinguir los *elementos componentes* de una red:

- * Los *tramos* son segmentos de tubo de características físicas homogéneas: son *las piezas* que forman la estructura de la red.

- * Los *nudos* son los extremos de los tramos. Un mismo nudo puede estar vinculado a uno o varios tramos.

- * Finalmente los *circuitos* o *mallas* son asociaciones de tramos alineados.

En la figura 6.1 se simbolizan los tramos con número romano y los nudos con número arábigo, que en definitiva es la notación que se ha empleado en los capítulos precedentes; sin embargo es bueno hacer énfasis sobre ella en este momento, dado que la complejidad que asumen a veces algunas redes obliga a un ordenamiento muy claro con respecto a las fórmulas y símbolos. Por otro lado los tramos también pueden identificarse por sus nudos extremos; en la red de la parte b) de la figura, el tramo I también puede designarse como tramo 1-2. Los circuitos se simbolizan con una letra C seguida de un subíndice o bien por los nudos componentes en orden consecutivo; el C_1 de la figura, por ejemplo, también puede designarse como circuito 2-3-5-2.

A veces se les da el nombre de *antenas* a los tramos ubicados en los extremos de la red, como lo son por ejemplo los llamados I y II en la figura 6.1.b; por un extremo dichos tramos están vinculados al resto de la red pero el otro nudo se encuentra aislado. Se empleará el término *grado de un nudo* para referirse a la cantidad de tramos que convergen a él; en la figura mencionada el nudo 1 es de grado 1, mientras que el nudo 2 es de grado 4.

Con respecto a los circuitos, de acuerdo a la definición cualquier *cadena* de tramos, inclusive un tramo singular, puede formar el circuito. A los formados por cadenas cerradas de tramos se les llama *circuitos cerrados*, como lo son el C_1 y el C_2 de la figura 6.1.b; en este tipo de mallas el nudo final coincide con el

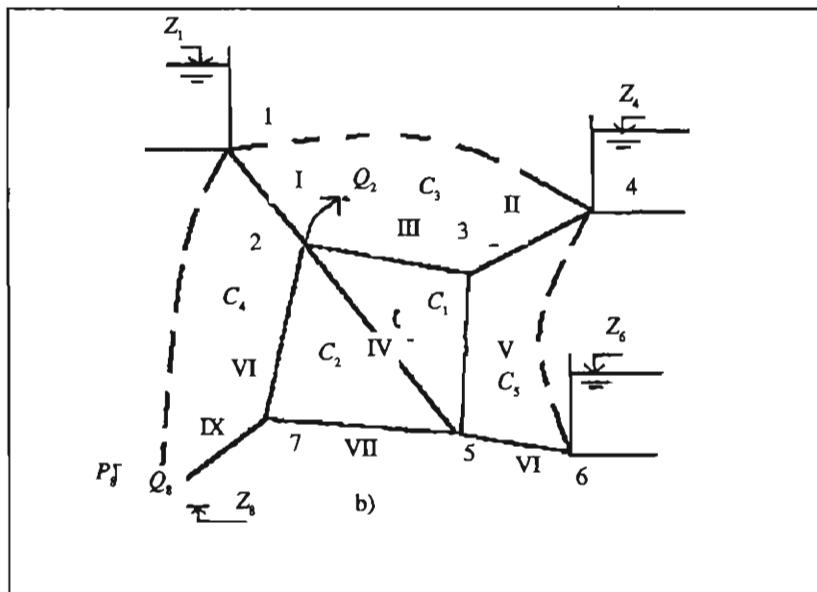
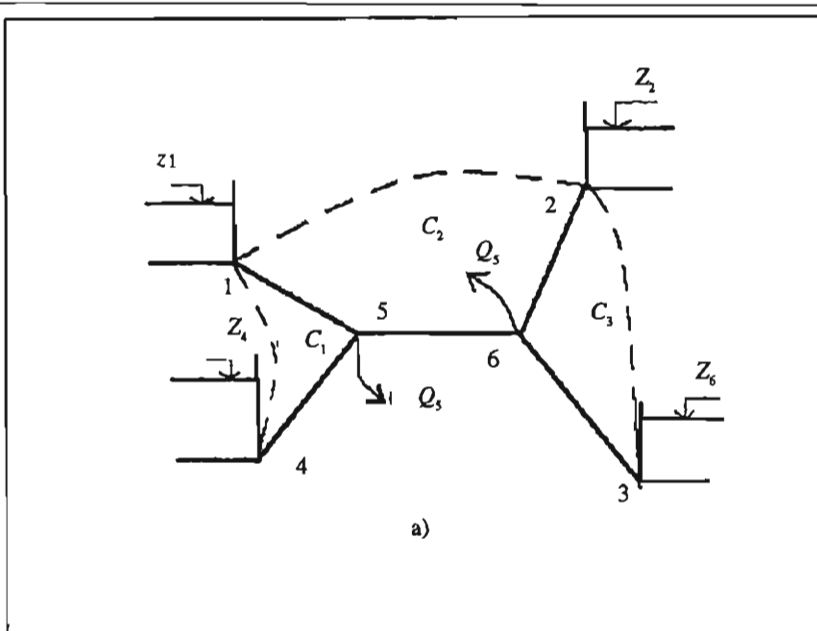


Figura 6.1: a) Red abierta. b) Red cerrada.

inicial y de hecho cualquier nudo puede tomarse para iniciar la cadena ($C_1 = 2-3-5-2 = 3-5-2-3$). A los que no cumplen con esta particularidad se les llama *circuitos abiertos*, son ejemplos el C_3 y el C_4 de la misma figura. Las líneas punteadas que unen los nudos 1 y 4 o el 1 y el 0 por ejemplo, no son tramos reales sino *tramos ficticios*, los cuales se emplean a veces para visualizar mejor los circuitos abiertos que se están considerando.

La existencia de circuitos cerrados en una red es un criterio fundamental para su clasificación. En el caso de la figura 6.1.a, en la que no existe ningún circuito cerrado, se dice que se trata de una *red abierta*; mientras que la de la parte b), que sí posee al menos uno (en el ejemplo dos), se llama *red cerrada*. Como se verá, esta distinción es importante por dos motivos: por un lado el método de cálculo es más sencillo en una red abierta que en una cerrada pero por otra parte la red cerrada es más eficiente en cuanto a su operación y el equilibrio de presiones.

La aplicación práctica más relevante que ofrecen las redes de tubos a presión se ve en los sistemas de distribución de agua, ya sea para uso doméstico, industrial o para prevención de incendios. Se puede modelar con una red un sistema *primario* de abastecimiento de agua, a nivel ciudad, como también una red de distribución domiciliaria directa. Tales sistemas requieren en general varias fuentes de alimentación, que pueden ser tanques o pozos, por ejemplo, mientras que el consumo se distribuye a lo largo de toda la red. Esto último es muy difícil de simular si se desea hacer en forma precisa, por eso es que el criterio que se adopta casi siempre es el de asignar a cada nudo el gasto que se consume en su *área de influencia*. En la figura 6.2.a se observa un ejemplo; se hace la hipótesis de que toda el agua que se consume en el área encerrada en la línea punteada sale de la red por el nudo 1; el error que se comete es aceptable, sobre todo si se considera que no es posible predecir con exactitud qué cantidad de agua se va a ocupar en un sector de la red; normalmente se asigna una *dotación* de agua por habitante y por día y se efectúan los cálculos necesarios para obtener el gasto Q_2 . En algunos casos, a fin de mejorar la precisión, se justifica considerar un nudo a medio tramo, como se ve en la parte b) de la misma figura; esto ocurrirá sobre todo si en esa posición se localiza un gran consumidor, como puede ser una planta industrial.

6.2 Sistema de ecuaciones

Los tres elementos constitutivos de una red, presentados en el apartado anterior, dan origen respectivamente a tres tipos de ecuaciones que son las que gobiernan el problema. Ya se ha hecho uso de ellas en este texto pero ahora se procurará un ordenamiento más sistemático.

6.2.1 Ecuaciones de tramo

Las *ecuaciones de tramo* son las de resistencia al flujo en los mismos, cuya expresión general es la siguiente:

$$H_{i-j} = a_{i-j} Q_{i-j}^n \quad (6.1)$$

O bien, si la incógnita es el gasto

$$Q_{i-j} = \left[\frac{H_{i-j}}{a_{i-j}} \right]^{\frac{1}{n}} = b_{i-j} H_{i-j}^{\frac{1}{n}} \quad (6.2)$$

H_{ij} es la pérdida en el tramo que une los nudos i y j ; nótese que se ha prescindido del subíndice f en dicho símbolo; esto se hace a fin de simplificar un poco la notación.

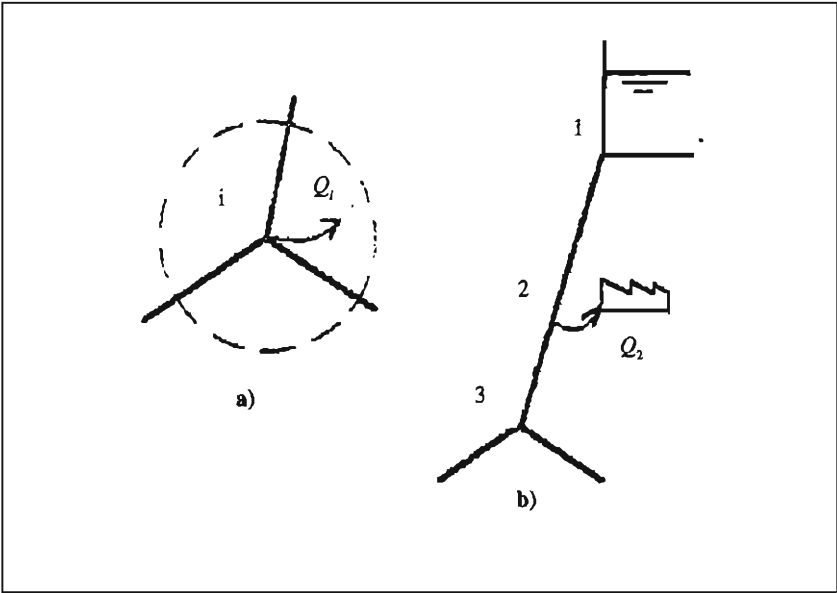


Figura 6.2: a) Area de influencia del nudo i. b) Nudo a medio tramo.

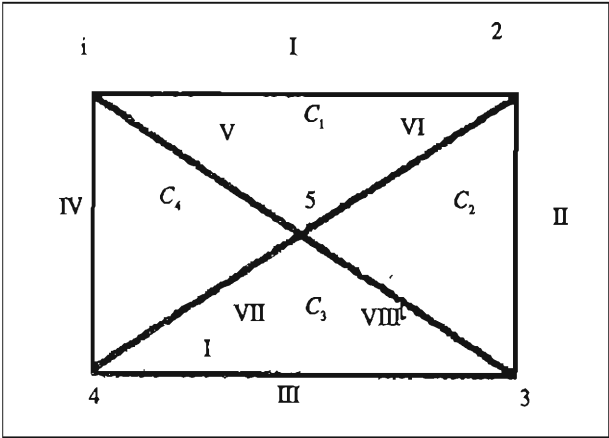


Figura 6.3: Red constituida por circuitos cerrados.

Q_{i-j} , a_{i-j} y b_{i-j} tienen un significado análogo, son respectivamente el gasto y los coeficientes a y b de dicho tramo (Referirse al capítulo anterior para el significado y la forma de calcular dichos coeficientes).

En la resolución de redes se presenta un problema que no se había observado hasta ahora. En todos los casos que se han estudiado, por complicados que fuesen, siempre existía un extremo de aguas arriba y otro de aguas abajo, por lo tanto era posible predecir el sentido del flujo en cada tramo. Ahora eso no siempre es así y para ejemplo obsérvese la red de la figura 6.1.a; en ella es posible anticipar que en el tramo 2-6 el sentido del flujo será del nudo 2 al 6, debido a la posición dominante del tanque; haciendo un razonamiento análogo se puede afirmar que el tanque 3 será receptor y por lo tanto en el tramo que llega a él el sentido del flujo será del nudo 6 al 3; por contraste, no es posible predecir el sentido del flujo en los otros tres tramos de la red; los tanques 1 y 4 ocupan un nivel intermedio, por lo tanto no se puede saber si serán alimentadores o receptores; tampoco puede asegurarse que en el tramo 5-6 el flujo sea de izquierda a derecha o a la inversa. Para hacer frente a esta incertidumbre no queda más remedio que hacer una hipótesis sobre el sentido del flujo en cada tramo; la resolución numérica del problema se encargará de confirmar si fue correcta o no. Los subíndices de la ecuación 6.1 ofrecen una oportunidad de expresar dicha hipótesis simbólicamente. En efecto, siempre que se escriba H_{i-j} se está implicando que el flujo va del nudo i al j . Si a la hora de los resultados dicha pérdida aparece con un valor negativo, significa que en realidad la corriente va en el sentido inverso al supuesto. Lo mismo puede decirse con respecto al gasto, Q_{i-j} será positivo si el líquido va de i a j y negativo en el caso opuesto.

Seguramente el lector manifestará a estas alturas una inquietud: por primera vez se está hablando de *pérdidas y gastos negativos*, lo cual evidentemente carece de sentido físico; una pérdida negativa desde ese punto de vista significaría que se está *creando energía* en lugar de disiparse. Sin embargo debe entenderse que esto no es más que la consecuencia de una convención matemática; no existen tales pérdidas y gastos negativos en la realidad, sino que así surgen en la resolución del problema como testimonio de una hipótesis de partida incorrecta.

Pero aún hay algo más que debe resolverse y esto sí es estrictamente matemático: Si el gasto en la fórmula 6.1 es negativo, se está en presencia de una potencia con base negativa y exponente racional, lo cual no tiene solución a menos que se use la ecuación de Darcy-Weisbach, en cuyo caso el exponente n vale 2; pero aún así la pérdida que se obtendría sería positiva y está claro que el signo del gasto y el de la pérdida deben ser iguales toda vez que sus subíndices mantengan el mismo orden. Por todo lo dicho, la forma correcta de expresar dicha ecuación es la siguiente:

$$H_{i-j} = a_{i-j} |Q_{i-j}|^{n-1} Q_{i-j}$$

De esta manera se logra que, en valor absoluto, el resultado sea el correcto pero además que el signo del gasto e traslade a la pérdida. Siguiendo el mismo razonamiento, la ecuación 6.2 deberá expresarse

$$Q_{i-j} = \frac{|H_{i-j}|^{\frac{1}{n}-1} H_{i-j}}{a_{i-j}^{\frac{1}{n}}} = b_{i-j} |H_{i-j}|^{\frac{1}{n}-1} H_{i-j}$$

Estas dos fórmulas se emplearán siempre que sea necesario, sin embargo en algunos casos podrá aceptarse la *licencia* de escribirlas en sus formas originales 6.1 y 6.2, recordando que sólo son válidas *para obtener el valor absoluto de la variable explícita*.

6.2.2. Ecuaciones de nudo

Las *ecuaciones de nudo* son las de balance de masa en los mismos. Todo el gasto que llega a ellos debe igualar al gasto que sale. El líquido puede entrar o salir de un nudo por los tramos que llegan a él o bien directamente desde o hacia el exterior de la red; en la figura 6.2.a, por ejemplo, el gasto Q_i sale por ese nudo hacia afuera y en la 6.2.b el nudo 1 recibe un gasto de una fuente de abastecimiento, que en ese caso es un tanque. Una forma adecuada de expresar estas ecuaciones es la siguiente:

$$Q_i + \sum Q_{i-j} = 0 \quad (6.5)$$

Esta fórmula se interpreta de la siguiente manera: *El gasto que sale hacia el exterior por el nudo i (Q_i) más los que salen de dicho nudo hacia cualquier otro (nudo j) de la red, es igual a cero.*

Si se toma como ejemplo el nudo 2 de la figura 6.1.b, la ecuación puede desarrollarse como sigue

$$Q_2 + Q_{2-1} + Q_{2-3} + Q_{2-5} + Q_{2-7} = 0$$

Evidentemente para que la suma sea cero algunos de los términos deben ser negativos. En efecto, si se recuerda lo estipulado en el punto anterior, el gasto Q_{2-1} , por ejemplo, será negativo ya que es claro que el flujo va del tanque al nudo 2. De acuerdo a esto el gasto es positivo si sale del nudo y negativo si llega a él; para guardar coherencia con esta convención, el gasto Q_i (Q_2 en el ejemplo) será positivo si sale por el nudo hacia el exterior de la red y negativo si entra; este último caso sería el de un nudo representativo de una fuente de abastecimiento.

6.2.3 Ecuaciones de circuito

Las *ecuaciones de circuito o de malla* son las de balance de energía en los circuitos. Supóngase que se aplica la ecuación de la energía al circuito abierto C_4 de la figura 6.1.b, entonces resulta

$$Z_1 - \left[Z_8 + \frac{P_8}{\lambda} \right] = H_{1-2} + H_{2-7} + H_{7-8} \quad (1)$$

Para ordenar y simplificar la notación se empleará el símbolo H_i para referirse al nivel energético de un nudo, de manera que la ecuación anterior se escribirá

$$H_1 - H_8 = H_{1-2} + H_{2-7} + H_{7-8}$$

La expresión general de esta ecuación, válida para *cualquier circuito*, será

$$\sum_o^u H_{i-j} = H_o - H_u \quad (6.6)$$

¹ Se recuerda que para aceptar la validez de esta ecuación no se requiere que el gasto sea el mismo en todos los tramos, si el lector tiene alguna duda refiérase al apartado 5.2: tubos en paralelo.

que se lee de esta manera: *La suma de las pérdidas de los tramos de un circuito es igual a la diferencia de energía entre el nudo inicial (o) y el final (u).*

Nuevamente se recuerda la convención hecha en el punto 6.2.1, es posible que algunas de las pérdidas H_{i-j} sean negativas, dependiendo del orden de los subíndices; es más, podría ocurrir que la diferencia $H_o - H_u$ lo sea también; ello no pasa en el ejemplo elegido, pero si ocurriría si se toma el nudo 8 como nudo inicial del circuito y el 1 como nudo final.

Si el circuito es cerrado, como por ejemplo el C, de la misma figura 6.1.b, el nudo inicial y el final coinciden, en consecuencia la diferencia $H_o - H_u$ será nula. Por lo tanto se podrá aceptar la siguiente ecuación general válida para *circuits cerrados*

$$\sum H_{i-j} = 0 \quad (6.7)$$

es decir: *La suma de las pérdidas de los tramos de un circuito cerrado es igual a cero.*

6.3 Planteo del problema

Casi siempre el cálculo de una red de tubos a presión es un problema de verificación, en el cual se conocen de antemano el arreglo geométrico de la red, así como los diámetros, longitudes, rugosidades y accesorios de los tramos. Este conjunto de datos puede identificarse como *características físicas de la red*.

El resto de las variables intervinientes son las hidráulicas: las *pérdidas* y los *gastos* en los tramos, los *niveles piezométricos* en los nudos y los *gastos* que entran o salen de la red por los mismos; algunas serán datos y las restantes serán las incógnitas del problema. Evidentemente la cantidad de variables requeridas como datos estará en función de la cantidad de ecuaciones disponibles; a continuación se hará un análisis al respecto.

Si se llama T a la cantidad de tramos y N a la de nudos, entonces la cantidad de variables hidráulicas es la siguiente:

T pérdidas en los tramos

T gastos en los tramos

N niveles piezométricos en los nudos

N gastos en los nudos

Total: $2T + 2N$ variables

En cuanto a las ecuaciones, evidentemente cada tramo y cada nudo estará representado por la suya. La determinación de la cantidad de ecuaciones de circuito, en cambio, no es tan directa. Ya se ha dicho que cualquier sucesión de tramos puede formar un circuito y la cantidad de arreglos posibles, aún en redes pequeñas, es enorme. Sin embargo, desde el punto de vista del cálculo, existe una limitación como se verá en el siguiente ejemplo; volviendo una vez más a la figura 6.1.b, considérense los circuitos 1-2, 2-3-4 y 1-2-3-4; sus ecuaciones respectivas serán:

$$H_1 - H_2 = H_{1-2}$$

$$H_2 - H_4 = H_{2-3} + H_{3-4}$$

$$H_1 - H_4 = H_{1-2} + H_{2-3} + H_{3-4}$$

Fácilmente puede observarse que la tercera ecuación es una combinación lineal de las dos primeras, de manera que sale sobrando, ¿Cómo determinar cuál es la cantidad necesaria y suficiente de ecuaciones de circuito? Un cambio muy simple para responder a este interrogante es considerar a *cada tramo como un circuito*, o que da un total de T ecuaciones del tipo

$$H_i - H_j = H_{i-j}$$

En tal caso ninguna ecuación dependerá de las demás pero cualquier circuito adicional que se tome estará formado al menos por dos tramos y dará una ecuación superabundante. Esta simple deducción lleva a la conclusión de que la cantidad de ecuaciones de circuito es igual a la de tramos. La cantidad total será entonces:

T ecuaciones de tramo

N ecuaciones de nudo

T ecuaciones de circuito

Total: $2T + N$ ecuaciones

De la comparación de esta expresión con la 6.8 resulta que las variables hidráulicas deben repartirse en:

N datos y ...

$2T + N$ incógnitas

Efectivamente, en los problemas de cálculo de redes normalmente se conoce un dato por cada nudo. Para los nudos ubicados en la zona de consumo, dicho dato es el gasto demandado; para los localizados en fuentes de abastecimiento el dato puede ser: el nivel piezométrico si se trata de un tanque de reserva; el gasto si se trata de una fuente de caudal controlado o, en la situación más compleja, una relación entre ambas variables que sería el caso de un pozo de bombeo. A este conjunto de datos se le llamará en general *cargas en los nudos*.

La definición de dichas cargas no puede ser del todo arbitraria; véase por ejemplo que si se conoce el gasto en todos los nudos menos en uno, éste último queda determinado por el principio de continuidad. Por otro lado si no se conoce el nivel piezométrico en un nudo al menos, se podrá calcular la distribución de gastos en la red pero no se podrá conocer la distribución de presiones que es uno de los objetivos primordiales del cálculo. En efecto, una vez que se conozcan los niveles piezométricos de todos los nudos, se pueden obtener las presiones restandoles las elevaciones respectivas (z_i); dichas presiones deben estar comprendidas dentro de ciertos límites para que la red sea factible. En conclusión: *el gasto no puede ser dato en todos los nudos*.

El hecho de que se tengan $2T + N$ ecuaciones no significa que las mismas deban resolverse en forma simultánea. En una red pequeña como la de la figura 6.1.a, se tienen 5 tramos y 6 nudos; de acuerdo a la expresión 6.9, esto implica un sistema de 16×16 . Afortunadamente algunas ecuaciones pueden resolverse en forma consecutiva y algunas pueden sustituirse fácilmente en otras; esto ayuda a simplificar los cálculos considerablemente. De todas maneras el gran escollo en la resolución de una red no radica tanto en la cantidad de ecuaciones sino en el hecho de que un grupo de ellas: las de tramo, son *no lineales*, ya que una de las variables está elevada a un exponente racional. Por esta razón es que los métodos de resolución de redes incluyen inevitablemente un procedimiento de aproximaciones sucesivas, el cual se seleccionará en función del tipo y tamaño de la red así como de las facilidades de cálculo disponibles.

En lo que sigue se verá la forma de resolver problemas concretos, empezando por el más sencillo que es el problema de los tres depósitos, hasta los más complicados de redes cerradas con gran número de tramos y accesorios especiales

6.4 El problema de los tres depósitos

El ejemplo que se ve en la figura 6.4 es el caso más sencillo de configuración de una red que pueda imaginarse. Los tres depósitos están abierto a la atmósfera y cada uno de ellos está unido por un tubo al nudo 4. Tal como se ha visto en el apartado anterior la cantidad de datos hidráulicos es de una en cada nudo: las elevaciones de los tres depósitos: z_1 , z_2 y z_3 y el gasto en el nudo 4 que en este caso es igual a cero. Las incógnitas son las pérdidas y gastos en los tramos, el nivel piezométrico en el nudo 4 y los gastos que entran a la red por los tres nudos restantes; claro que estos últimos son iguales a los gastos en los tramos respectivos; siempre se da esta situación en los nudos aislados de las antenas, de manera que es válido considerar ambas incógnitas como una sola. La resolución de un ejemplo numérico es la mejor forma de explicar el método que se sigue en este caso y que servirá de base para calcular otras redes abiertas.

Problema resuelto 6.1: Resolver la red con tres depósitos de la figura 6.4 cuyos datos son los siguientes: El líquido conducido es agua, la tubería es de concreto precolado liso con algunos años de servicio y los diámetros y longitudes de los tubos son:

Tramo	diámetro (mm)	longitud (m)
1-4	500	2.000
2-4	500	4.000
3-4	300	1.000

Las elevaciones de los depósitos son: $z_1 = 100$ m, $z_2 = 60$ m y $z_3 = 30$ m. No sale ni entra ningún gasto por el nudo 4.

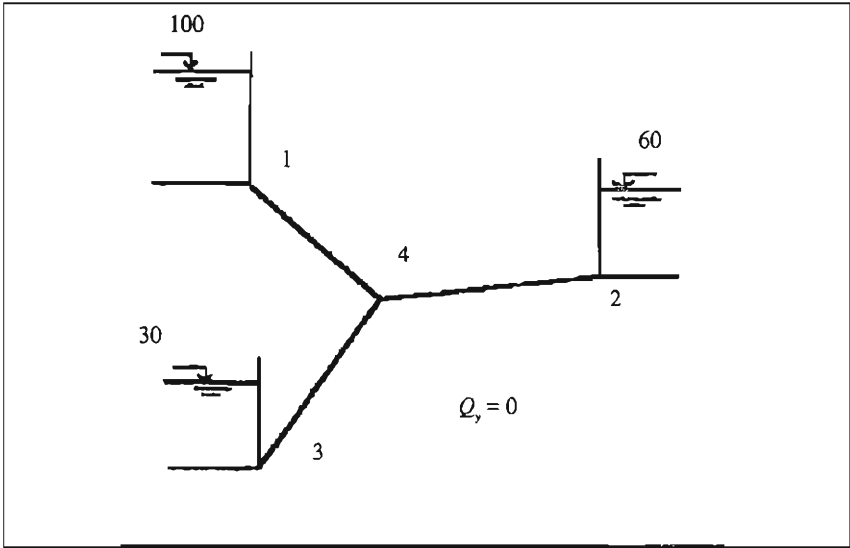


Figura 6.4: El problema de los tres depósitos.

Solución: Casi siempre puede adoptarse como primer paso en la resolución de una red, el cálculo de los coeficientes a de los tramos; en este caso se usará la fórmula de Darcy-Weisbach; el factor de fricción f puede determinarse con bastante precisión aun sin conocer los números de Reynolds, dado que se trata de tubos de gran diámetro y de material rugoso, por lo tanto la influencia de la viscosidad en la resistencia al flujo no será importante. Un criterio razonable para obtener los valores de f puede ser el de suponer que los mismos caen en la zona de turbulencia plena del diagrama de Moody. Un segundo criterio, que es el que se empleará aquí y en otros problemas que se resolverán en adelante, es el de adoptar una velocidad media para los tramos que esté comprendida en el intervalo considerarlo económico; de acuerdo a lo visto en el apartado 4.8, un valor adecuado podría ser 1.5 m/s. Además, dado que las longitudes de los tramos son importantes, se despreciarán las pérdidas por accesorios. Se adoptará para el concreto precolado una rugosidad de 0.3 mm. La siguiente tabla puede considerarse como un extensión de la que se incluye en el enunciado del problema. Se recuerda que en este caso la fórmula para el coeficiente a es:

$$a = \frac{8}{n^2} f \frac{L}{D^5} \tag{2.71}$$

Tramo	ϵ/D	f	a
1-4	0.0006	0.018	95.3
2-4	0.0006	0.018	190.6
3-4	0.001	0.0205	697

Para proceder a la resolución de esta red abierta, puede seguirse un proceso de aproximaciones sucesivas de tipo explícito; esto significa que se efectúan cálculos en forma *encadenada* hasta llegar a la solución; dichos cálculos pueden ordenarse en una hoja de cálculo como la tabla 6.1. Todo proceso de este tipo comienza con una hipótesis de partida que luego se confirmará, acertada o no; para este problema se supondrá el valor del nivel piezométrico del nudo 4, que se incluirá en la primera columna de la tabla; dicho nivel está acotado; no puede ser mayor que 100 m, porque en tal caso sería superior a z_1 , z_2 y z_3 y esto significaría que el flujo iría del nudo a los tres tanques, todos ellos serían receptores y esto no es posible, al menos en este ejemplo, en el que no sale ni entra gasto por el nudo 4. Siguiendo un razonamiento análogo se puede afirmar que el nivel H_4 tampoco puede ser menor que 30 m; entonces se empezará por un valor intermedio arbitrario de 70 m. En las 2a., 3a. y 4a. columnas se calculan las pérdidas en los tramos que resultan a partir de este supuesto, aplicando la ecuación de la energía o *ecuación de circuito*, como fueron llamadas más arriba. En este caso cada circuito se reduce a un solo tramo. En las columnas 5a., 6a. y 7a. se calculan los gastos en los tubos aplicando las *ecuaciones de tramo*. Finalmente en la 8a. y última, echando mano de la *ecuación del nudo* 4, se verifica si efectivamente la suma algebraica de los gastos en esa sección es igual a cero. Si no es así significa que el nivel piezométrico del nudo 4 no es el que se había supuesto. En efecto, en este primer tanteo dicha suma es distinta de cero y signo negativo. Observando las cantidades de esa fila de la tabla, se puede deducir que en la siguiente aproximación el valor de Q_4 deberá ser algo menor y el de los otros dos gastos deberá incrementarse; ello se logra probando con un valor de H_4 mayor que el de la primera fila de la tabla, por ejemplo 75 m; una vez que se llenan las columnas nuevamente, se aprecia que esta vez la suma de gastos tiene signo positivo; este resultado implica que el verdadero valor de H_4 estará comprendido entre los dos anteriores. Para que el tercer intento tenga más éxito que aquéllos, un camino adecuado es hallar el nuevo H_4 por interpolación lineal entre los dos anteriores; efectivamente el valor así obtenido, que es de 74 m, permite llegar al resultado exacto. Los valores que figuran en la última fila son los correctos (se los destaca en negritas).

Tabla 6.1

H_4	$H_{1-4} = H_1 - H_4$	$H_{2-4} = H_2 - H_4$	$H_{3-4} = H_3 - H_4$	$Q_{1-4} = \left[\frac{H_{1-4}}{a_{1-4}} \right] \frac{1}{n}$	$Q_{2-4} = \left[\frac{H_{2-4}}{a_{2-4}} \right] \frac{1}{n}$	$Q_{3-4} = \left[\frac{H_{3-4}}{a_{3-4}} \right] \frac{1}{n}$	$Q_{4-1} + Q_{4-2} + Q_{4-3}$
(m)	(m)	(m)	(m)	(m ³ /s)	(m ³ /s)	(m ³ /s)	(m ³ /s)
70	30	-10	-40	0.561	-0.229	-0.239	-0.093
75	25	-15	-45	0.512	-0.281	-0.254	+0.023
74	26	-14	-44	0.522	-0.271	-0.251	0.00

En la elaboración de esta tabla se siguió rigurosamente la convención de signos hecha en el apartado 6.2 y se ruega al lector que procure tenerla presente para hacer la interpretación en forma correcta. Así por ejemplo los gastos entran en la última columna con su signo cambiado respecto de las tres anteriores; la razón de esto es que cambia el orden de los subíndices en el encabezado ($Q_{1-4} = -Q_{4-1}$, etc.). Asimismo las ecuaciones que calculan los gastos se usan sólo para obtener sus valores absolutos, luego se les antepone el mismo signo de la pérdida correspondiente.

6.5 Resolución de redes abiertas

Para resolver redes abiertas en general, se sigue un camino similar al empleado para el problema anterior. Se parte de un valor supuesto que en general será el nivel piezométrico de un nudo y se hacen los cálculos correspondientes en forma encadenada hasta verificar una cierta condición de cierre en el extremo derecho de la tabla; de no cumplirse ésta se supone un nuevo valor inicial y así sucesivamente hasta llegar a los resultados correctos. Las hojas de cálculo pueden ser más o menos largas y la rapidez de convergencia también puede variar. Este procedimiento se adapta al cálculo manual pero también puede hacerse en forma automática o semiautomática (algunos paquetes de computación como Lotus 1-2-3, Excel, Quattro, etc., son adecuados al respecto porque permiten ordenar el cálculo mediante tablas).

A continuación se resolverán varios ejemplos.

Advertencia sobre la interpretación de las tablas: En las tablas 6.2 a 6.4 se resume la resolución de los próximos tres problemas. Es conveniente hacer algunas aclaraciones sobre la organización de las mismas:

- En el primer renglón se hace la designación de las columnas con un número entre paréntesis.
- En el segundo renglón se indica el tipo de ecuación que se ocupa, ya sea de tramo (T), de nudo (N) o de circuito (C).
- En el tercer renglón se expresa el nombre de la variable y la unidad de medida; para mayor claridad de interpretación los gastos se vuelcan en litros por segundo, aunque en las fórmulas intervienen en m³/s.
- A partir del cuarto renglón se anotan los resultados de las sucesivas aproximaciones.
- En la primera columna se hace la hipótesis de partida, que casi siempre es el nivel piezométrico de un nudo; en la última se presenta la condición de cierre.
- Debido a que se trata de tablas con muchas columnas se las presenta en dos o tres cuadros alineados verticalmente; es claro que el i-ésimo renglón de un cuadro se continúa con el homólogo del siguiente.

Problema resuelto 6.2: Resolver la red de la figura 6.1.a suponiendo que el tubo es de acero galvanizado ($C_H = 125$) y que los diámetros y longitudes de cálculo de los tramos son los siguientes:

Tramo	diámetro (mm)	longitud de cálculo (m)
1-5	150	880
4-5	150	1.180
5-6	250	1.820
2-6	200	650
6-3	150	720

Los datos hidráulicos son: $z_1 = 345$ m, $z_2 = 380$ m, $z_3 = 308$ m, $z_4 = 317$ m, $Q_5 = 21$ l/s, $Q_6 = 14$ l/s

Solución: Primeramente se calculan los coeficientes a de los tramos; por aplicarse la fórmula de Hazen-Williams, se emplea la siguiente ecuación (2.46)

$$a = \frac{10.68}{C_H^{1.85}} \frac{L_c}{D^{4.85}}$$

Tramo:	1-5	4-5	5-6	2-6	6-3
a :	12.300	16.500	2.130	2.250	10.060

La hoja de cálculo se presenta en la tabla 6.2; en la primera columna se asigna un valor tentativo al nivel piezométrico del nudo 5 (columna 1); seguidamente se calculan las pérdidas en los tramos 1-5 y 4-5:

$$H_{1-5} = z_1 - H_5 \dots\dots\dots (\text{columna 2})$$

$$H_{4-5} = z_4 - H_5 \dots\dots\dots (\text{columna 3})$$

; luego se calcula el gasto en dichos tubos:

$$Q_{1-5} = \left[\frac{H_{1-5}}{a_{1-5}} \right]^{-1/5} \dots\dots\dots (\text{columna 4})$$

$$Q_{4-5} = \left[\frac{H_{4-5}}{a_{4-5}} \right]^{-1/5} \dots\dots\dots (\text{columna 5})$$

El gasto en el tramo 5-6 corresponde a la columna 6 y se calcula haciendo el balance de energía en el nudo 5:

$$Q_5 + Q_{5-1} + Q_{5-2} + Q_{5-6} = 0 \quad Q_{5-6} = -(Q_5 + Q_{5-1} + Q_{5-2})$$

Luego se calcula la pérdida en el mismo tramo:

$$H_{5-6} = a_{5-6} Q_{5-6}^2 \dots\dots\dots (\text{columna 7})$$

A continuación se evalúa el nivel piezométrico del nudo 6

$$H_6 = H_3 - H_{3-6} \dots\dots\dots (\text{columna 8})$$

En las columnas 9 y 10 se obtienen las pérdidas en los tramos finales:

$$H_{6-2} = H_6 - z_2 \dots\dots\dots (\text{columna 9})$$

$$H_{6-3} = H_6 - z_3 \dots\dots\dots (\text{columna 10})$$

Los gastos Q_{6-2} y Q_{6-3} se calculan por las ecuaciones de tramo respectivas:

$$Q_{6-2} = \left[\frac{H_{6-2}}{a_{6-2}} \right]^{1/6} \dots\dots\dots (\text{columna 11})$$

$$Q_{6-3} = \left[\frac{H_{6-3}}{a_{6-3}} \right]^{1/6} \dots\dots\dots (\text{columna 12})$$

Finalmente en la última columna se verifica que la suma de gastos en el nudo 6 sea nula; esta es la condición de cierre que comprueba la veracidad de los resultados.

Se empieza asignando al nudo 5 un nivel piezométrico de 330 m y después de algunos intentos se llega al valor correcto que es de 341.61 m. Las cantidades que figuran en el último renglón de la tabla son la respuesta al problema. Se las resume en los dos listados siguientes, el primero de ellos para los tramos y el segundo para los nudos:

Tramo i-j	1-5	4-5	5-6	2-6	3-6
pérdida H_{i-j} (m)	3.39	-24.61	-5.20	33.19	-38.81
gasto Q_{i-j} (l/s)	11.9	-29.6	-38.7	102.2	-49.5

Tabla 6.2
Problema Resuelto 6.2

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	C	C	T	T	N	T
H_5 (m)	H_{15} (m)	H_{45} (m)	Q_{15} (l/s)	Q_{45} (l/s)	Q_{56} (l/s)	H_{56} (m)
330	15	-13	26.523	-20.94	-15.42	-0.947
350	-5	-33	-14.64	-34.66	-70.3	-15.68
340	5	-23	14.639	-28.51	-34.87	-4.286
342	3	-25	11.104	-29.83	-39.72	-5.454
341	4	-24	12.974	-29.18	-37.2	-4.831
341.6	3.4	-24.6	11.882	-29.57	-38.69	-5.193
341.61	3.39	-24.61	11.863	-29.58	-38.71	-5.199
(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	
C	C	C	T	T	N	
H_6 (m)	H_{62} (m)	H_{63} (m)	Q_{62} (l/s)	Q_{63} (l/s)	$Q_6 + Q_{65} + Q_{62} + Q_{63}$	
330.95	-49.05	22.947	-126.2	37.217	-59.58	
365.68	-14.32	57.679	-64.84	61.278	80.737	
344.29	-35.71	36.286	-106.3	47.688	-9.743	
347.45	-32.55	39.454	-101.1	49.897	2.5255	
345.83	-34.17	37.831	-103.8	48.776	-3.814	
346.79	-33.21	38.793	-102.2	49.444	-0.07	
346.81	-33.19	38.809	-102.2	49.455	-0.006	

Nudo i:	1	2	3	4	5	6
nivel piezométrico H_i (m)	345	380	308	317	341.61	346.81
gasto Q_i (l/s)	-11.9	-102.2	49.5	29.6	21	14

En el caso de los nudos algunos valores no proceden del cálculo sino que se parte de los gastos del problema. Como puede apreciarse la suma de los gastos de la última fila es igual a cero, ya que el gasto total que entra a la red debe ser igual al que sale. Tal como se ha comentado en el apartado anterior, los gastos en los nudos extremos de antena (1 a 4), son iguales a los de los tramos respectivos.

Problema resuelto 6.3: Resolver la red de la figura 6.5. Todos los tubos tienen 200 mm de diámetro y son de asbesto-cemento; los tramos 5-7, 7-8 y 8-9 son de 1,140 m de longitud cada uno y los demás son de 870 m. Los datos hidráulicos se indican en la propia figura. Despreciar las pérdidas secundarias.

Solución: Se aplica la fórmula de Hazen-Williams tomando $C_H = 140$. Se obtienen los coeficientes a empleando la fórmula 2.76, escrita en el problema anterior. En este caso el cálculo es fácil dado que los tramos tienen características muy similares.

Tramos 5-7, 7-8 y 8-9	$a = 3,200$
tramos 1-7, 6-7, 2-8 4-8 y 3-9	$a = 2,440$

En la tabla 6.3 se presentan los cálculos; de manera similar a los problemas anteriores, se empieza por suponer un valor para el nivel piezométrico del nudo 7; las ecuaciones empleadas son las siguientes:

$$H_{5-7} = Z_5 - H_7 \dots\dots\dots (\text{columna 2})$$

$$H_{1-7} = Z_1 - H_7 \dots\dots\dots (\text{columna 3})$$

$$Q_{5-7} = \left[\frac{H_{5-7}}{a_{5-7}} \right]^{1/4} \dots\dots\dots (\text{columna 4})$$

$$Q_{1-7} = \left[\frac{H_{1-7}}{a_{1-7}} \right]^{1/4} \dots\dots\dots (\text{columna 5})$$

$$H_{6-7} = a_{6-7} Q_{6-7}^n \dots\dots\dots (\text{columna 6})$$

(Véase que Q_{6-7} es igual al gasto Q_6 que entrega la bomba ubicada en ese nudo, el cual es dato del problema; por esta razón la pérdida H_{6-7} es la misma en todas las filas de la tabla)

$$Q_{7-8} = -(Q_7 + Q_{7-1} + Q_{7-5}) \dots\dots\dots (\text{columna 7})$$

$$H_{7-8} = a_{7-8} Q_{7-8}^n \dots\dots\dots (\text{columna 8})$$

$$H_8 = H_7 - H_{7-8} \dots\dots\dots (\text{columna 9})$$

$$H_{2-8} = Z_2 - H_8 \dots\dots\dots (\text{columna 10})$$

$$H_{4-8} = H_4 - H_8 = [Z_4 + f_4 L_4 / D^5] - H_8 \dots\dots\dots (\text{columna 11})$$

$$Q_{2-8} = \left[\frac{H_{2-8}}{a_{2-8}} \right]^{1/4} \dots\dots\dots (\text{columna 12})$$

$$Q_{4-8} = \left[\frac{H_{4-8}}{a_{4-8}} \right]^{1/4} \dots\dots\dots (\text{columna 13})$$

$$\begin{aligned}
Q_{8-9} &= -(Q_{8-4} + Q_{8-7}) \dots\dots\dots (\text{columna 14}) \\
H_{8-9} &= a_{8-9} Q_{8-9}^n \dots\dots\dots (\text{columna 15}) \\
Q_{9-3} &= -(Q_9 + Q_{8-9}) \dots\dots\dots (\text{columna 16}) \\
H_{9-3} &= a_{9-3} Q_{9-3}^n \dots\dots\dots (\text{columna 17}) \\
Z_3 &= H_8 - H_{8-9} - H_{9-3} \dots\dots\dots (\text{columna 18})
\end{aligned}$$

Esta última columna es la condición de cierre, ya que Z_3 es dato del problema. En el quinto renglón, con un valor inicial de $H_7 = 88.73$ m, se alcanza una aproximación suficiente, ya que el dato es $Z_3 = 125$ m y en la tabla se lee 125.04 m. Los resultados correctos, por lo tanto, son los correspondientes a esta fila. Faltaría calcular los niveles piezométricos de los nudos 6 y 9, los cuales no se han incluido en la tabla porque no es necesario para el procedimiento de aproximaciones.

$$H_6 = H_7 - H_{7-6} = 88.73 - (-15.53) = 104.26 \text{ m}$$

$$H_9 = H_8 - H_{8-9} = 107.55 - 0.0045 = 107.54 \text{ m}$$

En el siguiente listado se ordenan las variables hidráulicas en los tramos y nudos de la red, ya sean datos del problema u obtenidas por cálculo.

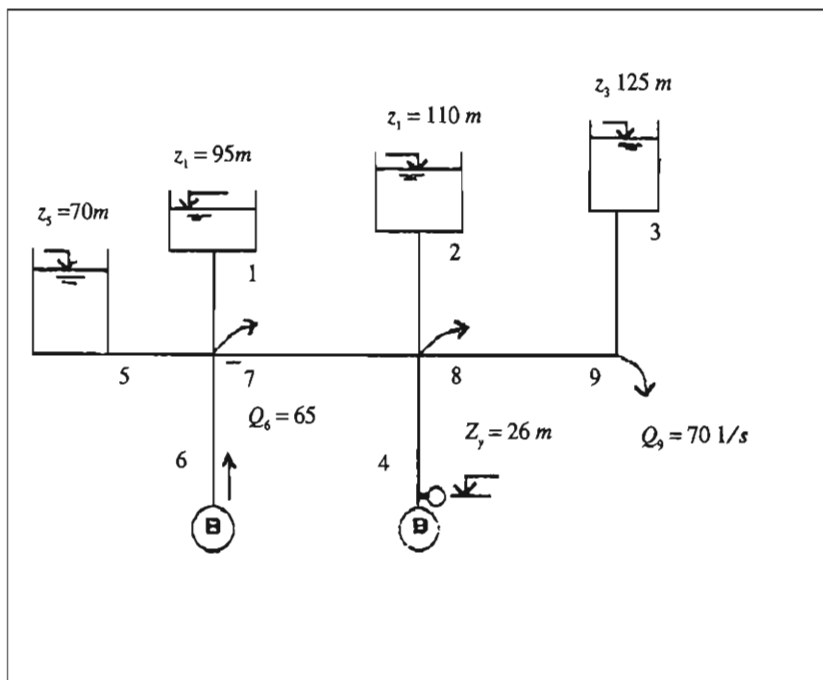


Figura 6.5: Problema resuelto 6.3.

Tabla 6.3
Problema Resuelto 6.3

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	C	C	T	T	T
H_7 (m)	H_{57} (m)	H_{17} (m)	Q_{57} (l/s)	Q_{17} (l/s)	H_{67} (m)
90	-20	5	-64.21	35.121	15.534
80	-10	15	-44.13	63.634	15.534
89	-19	6	-62.45	38.762	15.534
88.8	-18.8	6.2	-62.09	39.455	15.534
88.73	-18.73	6.27	-61.97	39.696	15.534
(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
N	T	C	C	C	T
Q_{78} (l/s)	H_{78} (m)	H_8 (m)	H_{28} (m)	H_{48} (m)	Q_{28} (l/s)
-69.08	-22.8	112.8	-2.803	-1,093	-25.68
-20.49	-2.408	82.408	27.592	29.302	88.488
-63.69	-19.62	108.62	1.3829	3.0929	17.522
-62.64	-19.02	107.82	2.1771	3.8871	22.399
-62.27	-18.82	107.55	2.452	4.162	23.887
(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)
T	N	T	N	T	C
Q_{48} (l/s)	Q_{89} (l/s)	H_{89} (m)	Q_{93} (l/s)	H_{93} (m)	Z_3 (m)
-15.43	-96.11	-42.01	-166.1	-88.16	242.96
91.414	124.9	68.203	54.902	11.369	2.8357
27.084	-10.39	-0.686	-80.39	-23.02	132.33
30.649	-1.953	-0.031	-71.95	-18.75	126.61
31.803	0.6895	0.0045	-69.31	-17.5	125.04

Tramo	pérdida (m)	gasto (l/s)	Nudo	nivel piezométrico(m)	gasto (l/s)
5-7	-18.73	-62.0	1	95	-39.7
1-7	6.27	39.7	2	110	-23.9
6-7	15.53	65.0	3	125	-69.3
7-8	-18.82	-62.3	4	111.71	-31.8
2-8	2.45	23.9	5	70	62.0
4-8	4.16	31.8	6	104.26	-65.0
8-9	0.004	0.7	7	88.73	40.0
3-9	17.5	69.3	8	107.55	55.0
			9	107.54	70.0

Problema resuelto 6.4: Resolver la red de la figura 6.6, cuyos datos se indican. Los tubos son de concreto. Emplear la fórmula de Manning-Strickler ($n = 0.011$)

Solución: La fórmula de Manning-Strickler es adecuada cuando la turbulencia está plenamente desarrollada; dado que se trata de tubos de diámetro importante, lo más probable es que ello ocurra en este caso. Véase que dentro de la red hay un arreglo de tubos en paralelo, se los designará 2-3' y 2-3'' respectivamente; esta distinción es necesaria porque ambos tienen los mismos nudos extremos. A primera vista podría pensarse que dicho arreglo está en serie con los tramos 1-2 y 3-4, pero ello no es así porque por los nudos 2 y 3 sale agua hacia el exterior, por lo tanto no se cumple una de las ecuaciones básicas de los arreglos en serie, de que el gasto sea el mismo en todos sus tramos. Como es costumbre, se empieza por calcular los coeficientes a ; para la fórmula de Manning-Strickler es:

$$a = 10.3 n^2 \frac{L}{D^{5.33}} \quad (2.90)$$

Tramo	diámetro (mm)	longitud (m)	a
1-2	500	1.120	56.15
2-3	300	2332	1780
2-3''	300	2332	1780
3-4	600	910	17.26

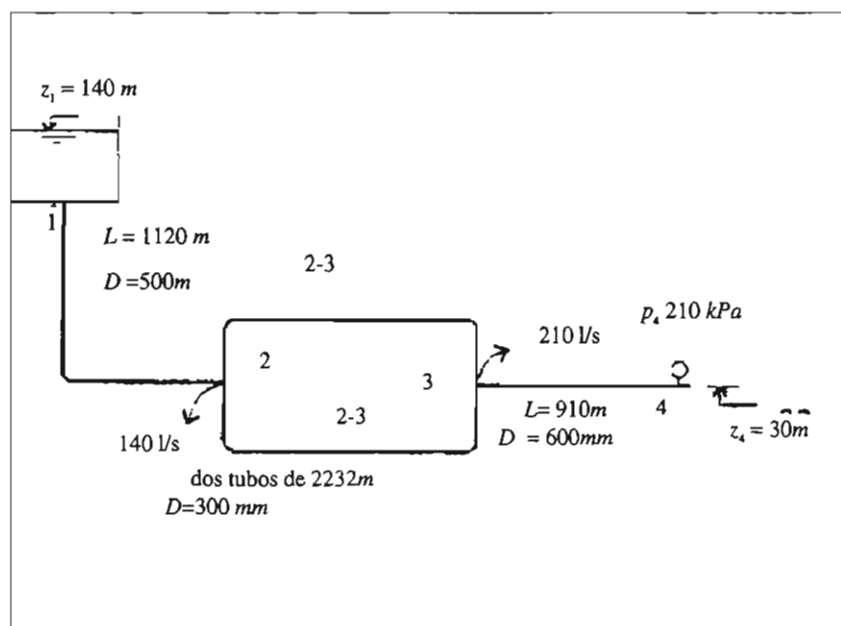


Figura 6.6: Problema resuelto 6.4.

Dado que los tramos 2-3' y 2-3'' están en paralelo, resulta cómodo reemplazarlos por su tubo equivalente antes de proceder a los cálculos. La ecuación 5.32, que se emplea para la obtención del coeficiente a de un arreglo en paralelo, adquiere la siguiente forma cuando se trata de dos tramos iguales y para la fórmula de Manning-Strickler, en la que $n = 2$

$$a_{2-3} = \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{1.780}} \right]^2} = 445$$

La resolución del problema se muestra en la tabla 6.4; en la primera columna se anota en valor propuesto para el nivel piezométrico en el nudo 2; las ecuaciones para calcular las demás variables son las siguientes:

$$H_{1-2} = Z_1 - H_2 \dots \dots \dots (\text{columna 2})$$

$$Q_{1-2} = \left[\frac{H_{1-2}}{a_{1-2}} \right]^{1/6} \dots \dots \dots (\text{columna 3})$$

$$Q_{2-3} = -(Q_{2-1} + Q_2) \dots \dots \dots (\text{columna 4})$$

$$H_{2-3} = a_{2-3} Q_{2-3} \dots \dots \dots (\text{columna 5})$$

$$Q_{3-4} = -(Q_{3-2} + Q_3) \dots \dots \dots (\text{columna 6})$$

$$H_{3-4} = a_{3-4} Q_{3-4}^* \dots\dots\dots (\text{columna 7})$$

$$H_4 = H_2 - H_{2-3} - H_{3-4} \dots\dots\dots (\text{columna 8})$$

Este último valor es la condición de cierre, ya que H_4 es dato del problema:

$$H_4 = Z_4 + P_4/\gamma = 30 + \frac{210,000}{9,800} = 51.43 \text{ m}$$

En el quinto renglón se lee $H_4 = 51.41$ m, con lo cual se alcanza una aproximación suficiente. La respuesta al problema, por lo tanto, se puede extraer de esta fila de la tabla; los tramos en paralelo, por ser de características iguales, tendrán ambos el mismo gasto que será la mitad del que figura en la tabla como Q_{2-3} . El nivel piezométrico en el nudo 3 será:

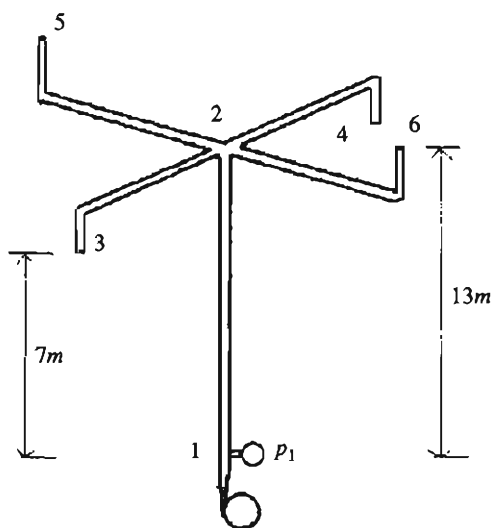
$$H_3 = H_2 - H_{2-3} = 123.57 - 71.53 = 52.04 \text{ m}$$

Tabla 6.4
Problema Resuelto 6.4

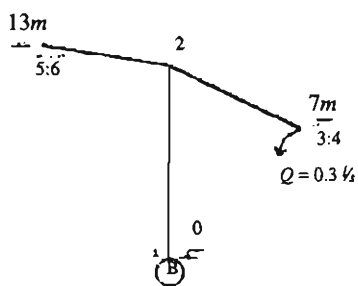
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	C	T	N	T	N	T	C
H_2 (m)	H_{1-2} (m)	Q_{1-2} (l/s)	Q_{2-3} (l/s)	H_{2-3} (l/s)	Q_{3-4} (l/s)	H_{3-4} (m)	H_4 (m)
120	20	596.8	456.8	92.86	246.8	1.051	26.09
130	10	422	282	35.39	72.01	0.089	94.52
124	16	533.8	393.8	69.01	183.8	0.583	54.41
123.6	16.4	540.4	400.4	71.35	190.4	0.626	51.62
123.57	16.43	540.9	400.9	71.53	190.9	0.629	51.41

Tramo	1-2	2-3'	2-3''	3-4
pérdida (m)	16.43	71.53	71.53	0.63
gasto (l/s)	540.9	200.4	200.4	190.9
Nudo	1	2	3	4
nivel piezométrico (m)	140	123.57	52.04	51.41
gasto (l/s)	-540.9	140	210	190.9

Problema resuelto 6.4: La figura 6.7.a presenta un sistema de tubos de acero galvanizado de cédula 40, cuyo elemento principal es un tramo vertical de 1.5 pulgadas de diámetro y 10 m de longitud. En su extremo superior (nudo 2) el gasto se reparte en otros 4 tubos; dos de ellos, el 2-5 y el 2-6, son de 3/4'' y de 5 m de longitud y descargan a la atmósfera a una elevación de 13 m por encima de la salida de la bomba; los otros dos son de 1/2'', 4 m de largo y descargan a 7 m arriba de dicha sección. Verificar la presión necesaria en el manómetro p_1 si se requiere que en todos los puntos de descarga el gasto sea como mínimo de 0.3 l/s. Despreciar pérdidas secundarias.



a)



b)

Figura 6.7: Problema resuelto 6.5 a) esquema del problema. b) modelo adoptado.

Solución: El interés de este problema no está en la dificultad de su cálculo matemático, sino en la definición del modelo. Véase que los tubos 2-5 y 2-6 conforman un arreglo en paralelo, ya que si se plantea la ecuación de la energía para ambos se verá que poseen la misma pérdida; esto se debe a que descargan al mismo nivel; otro tanto ocurre con los tubos 2-3 y 3-4. De manera que es válido el esquema de esta red que se presenta en la parte b de la figura, en donde 2-5;6 es el tubo equivalente del arreglo en paralelo que forman esos tramos y 2-3;4 posee un significado análogo.

Por otro lado, a diferencia de los problemas anteriores, en los que se contaba con un dato en cada nudo, aquí no se conoce ni el gasto ni el nivel piezométrico en el nudo 1; pero en cambio, de los nudos 3, 4, 5 y 6 se conoce su elevación y se sabe que la presión en ellos es la atmosférica y además se sabe que en dos de ellos el gasto es de 0.3 l/s; es decir que los datos son suficientes aunque no estén distribuidos precisamente a razón de uno por nudo. El enunciado especifica un gasto mínimo en las salidas, de modo que existen dos posibilidades: que dicho gasto corresponda a las salidas 3 y 4 y que en las 5 y 6 se registre uno mayor, o bien el caso opuesto. Dado que los tubos 2-3 y 3-4 tienen menor diámetro se empezará por suponer la primera de estas dos hipótesis, que es la que se representa en la figura 6.7.b; si no es así el mismo cálculo se encargará de decirlo.

Otro aspecto importante de este problema se refiere a la ecuación de resistencia al flujo que debe elegirse; evidentemente, dado que los diámetros son muy pequeños, deberán emplearse la ecuación de Darcy-Weisbach y el diagrama de Moody.

En este caso no se requiere de un proceso de aproximaciones sucesivas para resolver el problema ya que puede seguirse la siguiente serie de pasos:

i) Se calcula la pérdida en los tramos 2-3 y 3-4; estos tubos poseen un diámetro nominal de 1/2", para cédula 40 el diámetro interior es de 0.0158 m¹, por lo tanto

$$U_{2-3} = U_{2-4} = \frac{4 \times 0.0003}{\pi \times 0.0158^2} = 1.53 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{1.53 \times 0.0158}{10^{-6}} = 24.200$$

Para calcular la rugosidad relativa se tomará una rugosidad absoluta $\epsilon = 0.15 \text{ mm}$

$$\epsilon/D = \frac{0.15}{15.8} = 0.0095$$

Del diagrama de Moody se obtiene $f = 0.0395$. La pérdida se calcula por la ecuación de Darcy-Weisbach

$$H_{2-3} = H_{2-4} = 0.0395 \times \frac{4}{0.0158} \times \frac{1.53^2}{19.6} = 1.194 \text{ m}$$

ii) A continuación se calcula el nivel piezométrico en el nudo 2

$$H_2 = H_3 - H_{3-2} = 7 - (-1.194) = 8.194 \text{ m}$$

¹ En tubos de acero de pequeño diámetro, el diámetro interior difiere un poco del diámetro nominal, por lo tanto es conveniente consultar aquel valor en una tabla de tubos comerciales, como la que se incluye en la referencia (14).

La razón de haber puesto con signo negativo la pérdida en esta ecuación se debe a que el flujo va de 2 a 3.

iii) Se sigue con el cálculo de la pérdida en los tramos 2-5 y 2-6

$$H_{2-5} = H_{2-6} = H_2 - Z_5 = 8.94 - 13 = -4.81$$

El haber obtenido una pérdida negativa para estos tramos significa que el flujo va del extremo de los tubos hacia el nudo; por lo tanto la hipótesis de partida fue incorrecta, el gasto de 3 l/s no se observará en las salidas 3 y 4 sino en las salidas 5 y 6; se debe reiniciar el cálculo, ahora con este supuesto.

i) Se calcula la pérdida en los tramos 2-5 y 2-6; cuyo diámetro nominal es de 3/4", su diámetro interior es de 0.021 m; entonces:

$$U_{2-5} = U_{2-6} = \frac{4 \times 0.0003}{\pi \times 0.021^2} = 0.0866 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{0.0866 \times 0.021}{10^{-6}} = 18.200$$

$$\epsilon_D = \frac{0.15}{21} = 0.0071$$

Del diagrama de Moody se obtiene $f = 0.0375$. La pérdida será:

$$H_{2-5} = H_{2-6} = 0.0375 \times \frac{5}{0.021} \times \frac{0.0866^2}{19.6} = 0.34 \text{ m}$$

ii) El nivel piezométrico en el nudo 2 es

$$H_2 = H_5 - H_{5-2} = 13 - (-0.34) = 13.34 \text{ m}$$

iii) Ahora se calculan las pérdidas en 2-3 y 2-4

$$H_{2-3} = H_{2-4} = H_2 - Z_3 = 13.34 - 7 = 6.34 \text{ m}$$

iv) Sigue la obtención del gasto en estos mismos tramos, lo cual se hará por el método directo

$$\text{Re } \sqrt{f} = \frac{0.0158^{1.5}}{10^{-6}} \sqrt{\frac{19.6 \times 6.34}{4}} = 11.070 \quad (2.40)$$

$$f = \frac{1}{\left[-2 \log \left(\frac{2.52}{11.070} + 0.269 \times 0.0095 \right) \right]^2} = 0.0383 \quad (2.41)$$

$$U = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.0158 \times 6.34}{0.0383 \times 4}} = 3.58 \text{ m/s} \quad (2.42)$$

$$Q_{2-3} = Q_{2-4} = 3.58 \times \frac{\pi \times 0.0158^2}{4} = 0.00070 \text{ m}^3/\text{s} = 0.7 \text{ l/s}$$

v) A continuación se obtiene el gasto en el tramo 1-2 por balance de masa en el nudo 2. Para expresar el cálculo con mayor claridad se partirá de la ecuación básica de dicho nudo:

$$Q_{2-1} + Q_{2-3} + Q_{2-4} + Q_{2-5} + Q_{2-6} = 0$$

Por lo tanto:

$$Q_{1-2} = Q_{2-3} + Q_{2-4} + Q_{2-5} + Q_{2-6} = 2 \times 0.7 + 2 \times 0.3 = 2 \text{ l/s}$$

vi) Se calcula la pérdida en dicho tramo; su diámetro interior es de 0.0409 m

$$U_{1-2} = \frac{4 \times 0.002}{\pi \times 0.0409^2} = 1.52 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{1.52 \times 0.0409}{10^{-6}} = 62.200$$

$$\epsilon/D = \frac{0.15}{40.9} = 0.0037$$

Del diagrama de Moody se obtiene $f = 0.0295$. La pérdida será:

$$H_{1-2} = 0.0295 \times \frac{10}{0.0409} \times \frac{1.52^2}{19.6} = 0.85 \text{ m}$$

vii) Finalmente se calcula la presión en la salida de la bomba

$$H_1 = H_2 - H_{2-1} = z_1 + \frac{P_1}{\gamma}$$

despejando:

$$P_1 = \gamma [H_2 + H_{1-2} - z_1] = 9.800 \times (13.34 + 0.85 - 0) = 139.000 \text{ Pa} = 139 \text{ kPa}$$

6.6 Resolución de redes cerradas. El método de Hardy Cross

Cuando se trata de resolver una red cerrada no se puede seguir el método que acaba de emplearse para redes abiertas. Si se analiza un poco el ya familiar ejemplo de la figura 6.1.b, se verá si se hace una hipótesis para el nivel piezométrico del nudo 2. Al llegar al nudo 3 será necesario hacer una nueva hipótesis, porque no se cuenta con elementos suficientes para calcular todas las variables vinculadas a él; otro tanto ocurrirá al llegar al nudo 5. Algunas redes abiertas de estructura complicada también presentan este problema, como es el caso de la dibujada en la figura 6.8; se desafía al lector a que diseñe una hoja de cálculo que permita resolverla al estilo de los ejemplos del apartado anterior.

En efecto, para encarar estos problemas, que son los más complejos que se tratan en esta obra, es necesario hacer varias hipótesis, no bastará ya suponer un valor para el nivel piezométrico de tal o cual nudo sino que será necesario proponer todo un conjunto de valores iniciales. Ahora bien, si esto se hace de manera arbitraria, será prácticamente imposible llegar a la solución en un tiempo razonable. Se requiere disponer de un procedimiento que haga que cada aproximación sea más cercana a la solución real que la anterior, de otro modo no se podrá garantizar una convergencia eficaz y rápida.

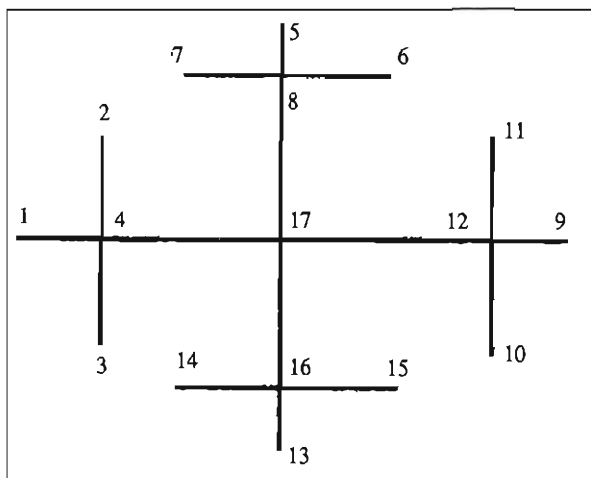


Figura 6.8: Red abierta que no puede resolverse en forma encadenada.

El método de *Hardy Cross* para el cálculo de redes cerradas es el primero que se ha documentado al respecto, data de 1936 (Referencia 39). Ha gozado y goza de gran difusión y popularidad; una de las razones para esto es su adaptabilidad al cálculo manual que por cierto, era el único disponible en esa época. Básicamente consiste en:

- Seleccionar los circuitos cuyas ecuaciones se plantearán.
- Suponer gastos en los tramos que satisfagan las ecuaciones de continuidad en los nudos.
- Reemplazar las ecuaciones de tramo en las de circuito.
- Obtener correcciones a los gastos en forma consecutiva haciendo un balance de energía circuito por circuito.
- Una vez conocidos los verdaderos gastos y pérdidas en los tramos, se pueden calcular por separado los niveles piezométricos y gastos en todos los nudos.

En lo que sigue se explicarán estos pasos en detalle.

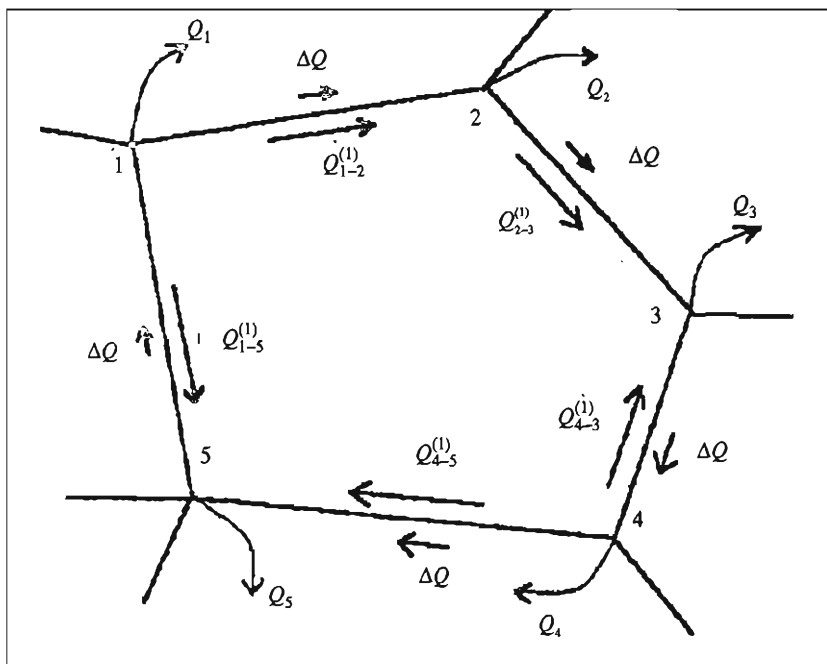


Figura 6.9: Método de Cross; determinación de la corrección ΔQ en un circuito cerrado.

A diferencia de los métodos de resolución de redes abiertas, en los que las ecuaciones de circuito se plantean tramo a tramo, el método de Cross requiere seleccionar cadenas de tramos para la formulación de dichas ecuaciones. La razón es que es preciso hacerlo de tal manera que la diferencia de energía entre los nudos extremos sea conocida; esto se hace con el fin de reducir la cantidad de incógnitas a despejar en forma simultánea. El camino para lograrlo es seleccionar por un lado los circuitos cerrados; en ellos la diferencia de energía entre los nudos extremos siempre es conocida porque vale cero. Por otro lado se deben seleccionar circuitos abiertos que posean como nudos extremos aquellos en los que el nivel piezométrico es dato del problema. Como se dijo en el apartado 6.3, la cantidad de ecuaciones de circuito debe ser suficiente pero no superabundante; en los problemas que se resuelven más adelante se verá cómo observar que se cumpla esta condición.

El segundo paso del método de Cross consiste en suponer gastos en los tramos, que son los valores iniciales de los que se ha hablado más arriba; la condición es que dichos gastos ficticios cumplan con el principio de continuidad; de esta manera es como el método tiene en cuenta las ecuaciones de nudo.

A continuación deben reemplazarse las ecuaciones de tramo en las de circuito, lo cual es muy sencillo dado que las primeras son monómicas. Con esto se logra que la cantidad de ecuaciones a resolver simultáneamente se reduzca al número de circuitos; normalmente esta cifra es de menos de la mitad de la cantidad global de ecuaciones que como se recordará es igual a $2T + N$. Sin embargo dicho sistema reducido está formado por ecuaciones no lineales, lo cual requiere un procedimiento de aproximaciones sucesivas para su resolución. Aquí es donde empieza el verdadero proceso de cálculo del método de Cross.

Supóngase que el de la figura 6.9 es un circuito cualquiera de una red que se desea calcular; la ecuación del mismo es la siguiente:

$$H_{1-2} + H_{2-3} + H_{3-4} + H_{4-5} + H_{5-1} = 0 \quad (6.10)$$

Si en la misma se reemplazan las ecuaciones de tramo resulta

$$a_{1-2} Q_{1-2}^n + a_{2-3} Q_{2-3}^n - a_{3-4} Q_{4-3}^n + a_{4-5} Q_{4-5}^n - a_{5-1} Q_{1-5}^n = 0 \quad (6.11)$$

(En los tramos 3-4 y 5-1 se supuso que el flujo es opuesto al sentido de recorrido del circuito que es el de las agujas del reloj; por ello se han escrito dichos términos como negativos)

Ahora bien, los gastos Q_{ij} se desconocen; los valores supuestos, que se simbolizan $Q_{ij}^{(1)}$, diferirán de los verdaderos en una cantidad ΔQ_{ij}

$$Q_{i-j} = Q_{i-j}^{(1)} + \Delta Q_{i-j} \quad (6.12)$$

Dicha corrección es diferente para cada tramo; sin embargo supóngase que se aplica a todos ellos una corrección única ΔQ , de manera que se siga cumpliendo la ley de continuidad; en el nudo 2 de la figura por ejemplo, el gasto $Q_{1-2}^{(1)}$ se incrementa en un ΔQ pero lo mismo sucede con $Q_{2-3}^{(1)}$, de manera que lo que entra de más por un lado sale por el otro. Por supuesto que esta corrección no conducirá a los gastos verdaderos sino a otros que se llamarán $Q_{ij}^{(2)}$

$$Q_{i-j}^{(2)} = Q_{i-j}^{(1)} + \Delta Q \quad (6.13)$$

El método de Cross permite calcular el valor de ΔQ de tal manera que estos gastos sean más aproximados que los anteriores a los verdaderos; así al cabo de varias iteraciones se llegará a la solución del problema.

Si se reemplaza la 6.13 en la 6.11 se obtiene:

$$\begin{aligned} a_{1-2}(Q_{1-2}^{(1)} + \Delta Q)^n + a_{2-3}(Q_{2-3}^{(1)} + \Delta Q)^n - a_{3-4}(Q_{4-3}^{(1)} - \Delta Q)^n + a_{4-5} + \\ (Q_{4-5}^{(1)} + \Delta Q)^n - a_{5-1}(Q_{1-5}^{(1)} - \Delta Q)^n \approx 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Si se admite que la corrección ΔQ es pequeña comparada con los gastos, entonces puede aplicarse la siguiente aproximación

$$(Q_{i-j}^{(1)} + \Delta Q)^n \approx Q_{i-j}^{(1)n-1} \Delta Q$$

o bien

$$(Q_{i-j}^{(1)} - \Delta Q)^n \approx Q_{i-j}^{(1)n} - n Q_{i-j}^{(1)n-1} \Delta Q \quad (6.15)$$

es decir que se consideran los dos primeros términos del desarrollo de la potencia del binomio. Si se hace la sustitución en la ecuación 6.14, resulta

$$\begin{aligned}
& a_{1-2}(Q_{1-2}^{(1)n} + nQ_{1-2}^{(1)n-1} \Delta Q) + a_{2-3}(Q_{1-2}^{(1)n} + nQ_{1-2}^{(1)n-1} \Delta Q) - a_{3-4} \\
& (Q_{4-3}^{(1)n} - nQ_{4-3}^{(1)n-1} \Delta Q) + a_{4-5}(Q_{4-5}^{(1)n} + nQ_{4-5}^{(1)n-1} \Delta Q) \\
& - a_{5-1}(Q_{1-5}^{(1)n} - nQ_{1-5}^{(1)n-1} \Delta Q) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

La cantidad ΔQ puede despejarse de esta ecuación, resultado

$$\Delta Q = - \frac{a_{1-2} Q_{1-2}^n + a_{2-3} Q_{2-3}^n - a_{3-4} Q_{4-3}^n + a_{4-5} Q_{4-5}^n - a_{5-1} Q_{1-5}^n}{n \left[a_{1-2} Q_{1-2}^{n-1} + a_{2-3} Q_{2-3}^{n-1} + a_{3-4} Q_{4-3}^{n-1} + a_{4-5} Q_{4-5}^{n-1} + a_{5-1} Q_{1-5}^{n-1} \right]}$$

Esta expresión se puede escribir simbólicamente de la siguiente forma para cualquier círculo cerrado

$$\Delta Q = - \frac{\sum a_{i-j} |Q_{i-j}|^{n-1} Q_{i-j}}{n \sum a_{i-j} |Q_{i-j}|^{n-1}} \tag{6.16}$$

De acuerdo a la ecuación 6.3 los términos del numerador representan las pérdidas en los tramos y los del denominador son las pérdidas divididas por los gastos respectivos; de manera que esta expresión se puede escribir también de la siguiente manera

$$\Delta Q = - \frac{\sum H_{i-j}}{n \sum \frac{H_{i-j}}{Q_{i-j}}} \tag{6.17}$$

Puede seguirse un razonamiento análogo para obtener la ecuación de la corrección Q para un circuito abierto, la cual resulta:

$$\Delta Q = - \frac{\left[\sum a_{i-j} |Q_{i-j}|^{n-1} Q_{i-j} \right] - (H_o - H_u)}{n \sum a_{i-j} |Q_{i-j}|^{n-1}} \tag{6.18}$$

o bien:

$$\Delta Q = - \frac{\left[\sum H_{i-j} \right] - (H_o - H_u)}{n \sum \frac{H_{i-j}}{Q_{i-j}}} \tag{6.19}$$

Como se recordará, H_o es el nivel piezométrico del nudo inicial del circuito y H_u el nudo final.

El algoritmo para el cálculo de una red por el método de Cross, que fue presentado más arriba en su forma general, puede ahora describirse de manera más detallada:

¹ La expresión del primer miembro es exactamente igual a cero a pesar de las aproximaciones realizadas, porque precisamente esta ecuación sirve para definir la corrección media ΔQ forma, válida para cualquier circuito cerrado.

i) Se identifican los circuitos de la red.
ii) Se asignan gastos supuestos a los tramos cuidando que se verifique la ley de continuidad en los nudos.
iii) Se calcula la corrección ΔQ para el primer circuito empleando alguna de las cuatro ecuaciones anteriores.

iv) Se retira el paso iii) para los demás circuitos de la red en forma sucesiva; conforme se calcula ΔQ para un circuito se aplica dicha corrección a los tramos correspondientes antes de proceder al circuito siguiente.

v) Una vez que se efectuó el procedimiento anterior se completa apenas la primera iteración. Dicha rutina de cálculo debe repetirse las veces que sea necesario hasta que las correcciones ΔQ de todos los circuitos sean despreciables. Como resultado se conocerán las pérdidas y gastos en todos los tramos.

vi) Se calculan los niveles piezométricos y los gastos desconocidos en los nudos. Dichas variables se pueden obtener por separado aplicando ecuaciones de circuito o de nudo según el caso.

Puede apreciar el lector que el método no promete precisamente un cálculo rápido y directo; por el contrario pueden requerirse numerosas aproximaciones para llegar a la solución del problema. Para citar un ejemplo sencillo, una red de 4 circuitos podría requerir con suerte unas 8 aproximaciones; en tal caso deberán calcularse en total 32 valores de ΔQ .

¿ De qué dependerá la *rapidez de convergencia* del método ?

Evidentemente el *tamaño de la red* tendrá su influencia en esta cuestión; redes con gran número de tramos convergen con mayor lentitud. Otro factor que influye es el *grado de los nudos*, es decir la cantidad de tramos que convergen a ellos; redes con nudos de grado 5 o más tienen una convergencia particularmente lenta.

Finalmente otro elemento a considerar son *los gastos supuestos al iniciar el cálculo*; entre más cercanos sean éstos a los reales, más rápidamente se llegará a la solución. Naturalmente que si los gastos son las incógnitas del problema nunca se puede saber qué tan aproximados a los verdaderos sean aquéllos. Sin embargo se pueden proponer algunas ideas que ayuden a escoger una buena hipótesis de partida:

- En los circuitos cerrados el sentido del flujo no puede ser el mismo en todos los tramos. Si el circuito de la figura 6.9 se recorre en el sentido de las agujas del reloj y en todos los tramos el gasto es positivo, la pérdida también lo será y no es posible que una suma de puros términos positivos sea igual a cero. De manera que en todos los circuitos cerrados debe haber flujos opuestos.

- Lo anterior no es válido para los circuitos abiertos pero aquí también debe aplicarse cierta lógica. En el circuito C₃ de la figura 6.1.b el tanque 1 es más alto que el tanque 4; por lo tanto es posible que en todos los tramos el sentido del flujo sea del primero al segundo, aunque también puede ocurrir que en alguno la corriente vaya en el sentido opuesto.

- Por último, algo más que puede ayudar a una buena hipótesis inicial es elegir los gastos de acuerdo a la capacidad de descarga del tubo. Un buen criterio al respecto puede ser el de emplear una velocidad económica de 1 a 2 m/s, aunque puede tomarse un valor algo mayor para tramos troncales y menor para tubos de distribución directa.

A continuación se presentan dos problemas resueltos; en el primero de ellos se incluyen varios ejemplos de redes pero sólo se pide completar la fase preparatoria del cálculo; se considera importante insistir en esto dado que son los pasos del método que requieren más criterio y experiencia por parte del calculista. En el segundo problema en cambio se realiza el cálculo de una sola red pero en forma completa.

Problema resuelto 6.6: Plantear las ecuaciones de circuito y asignar los gastos iniciales a los tramos para resolver las siguientes redes por el método de Hardy Cross

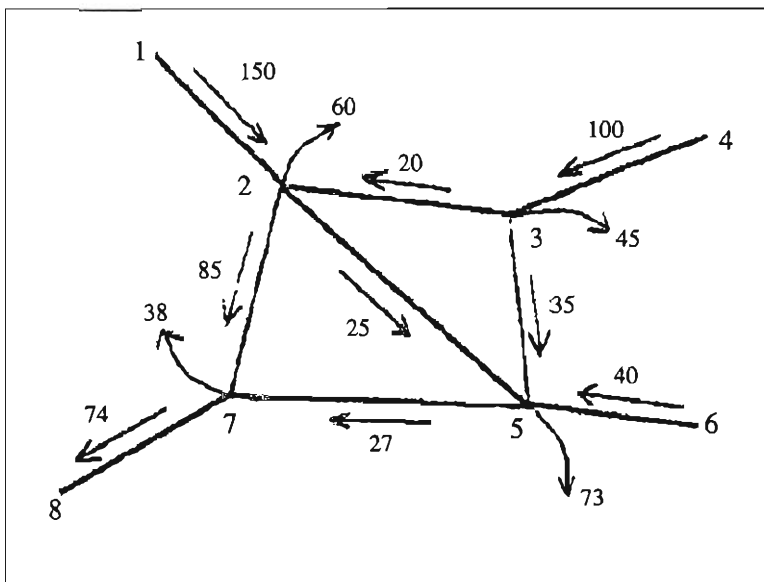


Figura 6.10: Problema resuelto 6.7, (Método de Cross), gastos iniciales.

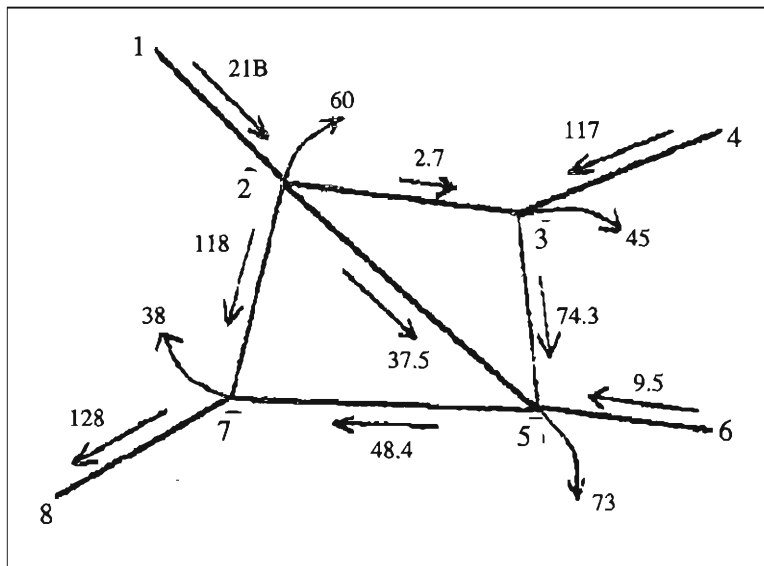


Figura 6.11: Problema resuelto 6.7, gastos calculados.

a) La red de la figura 6.1.b suponiendo que los datos en los nudos son los siguientes:

Nudo	Gasto (l/s)	Nivel piezométrico (m)
1		160
2	60	
3	45	
4		140
5	73	
6		125
7	38	
8	8	110

... y que los diámetros de la tubería son:

tramos 1-2, 3-4, 5-6 y 7-8: 300 mm

tramos 2-3, 2-7 y 3-5: 250 mm

tramos 2-5 y 5-7: 200 mm

b) La red de la figura 6.3 con los siguientes datos

Nudo	Gasto (s/l)	Nivel piezométrico (m)
1	80	
2	-55	
3	52	
4	0	
5		38

Los diámetros son de 200 mm en los tramos perimetrales y de 150 mm en las diagonales.

c) La red de la figura 6.13 para los datos que se indican en la misma y suponiendo que el diámetro es de 200 mm en todos los tramos.

b) El mismo caso anterior pero con la variante de que el dato en el nudo 7 no es el nivel piezométrico sino el gasto que es de -120 l/s

Solución:

a) Como se ha dicho más arriba, deben seleccionarse los circuitos cerrados para plantear las ecuaciones de circuito, ya que siempre se conoce la diferencia de energía entre sus nudos extremos, que vale cero. Ahora bien, así como existen muchas combinaciones posibles para los circuitos, también son muchas las posibilidades para formar circuitos cerrados. En el caso mencionado, por ejemplo, se pueden tomar los circuitos 2-3-5-2 y 2-5-7-2 pero también el 2-3-5-7-2- cuya ecuación es linealmente dependiente de las dos anteriores. Para evitar este problema, un camino adecuado es tomar todos los circuitos cerrados

posibles que no tengan tramos en su interior, de esta manera el último de los tres mencionados quedaría excluido.

En cuanto a los circuitos abiertos, el criterio es que deben emplearse como nudos extremos de los mismos, aquellos en los cuales el nivel piezométrico sea dato. En el ejemplo a resolver, se han considerado los circuitos $C_3 = 1-2-3-4$, $C_4 = 1-2-7-8$ y $C_5 = 4-3-6-5$. El circuito 8-7-5-6 sale sobrando, ya que su ecuación es dependiente de las anteriores. La regla es que la cantidad de circuitos abiertos debe ser igual a la cantidad de nudos en los que es dato el nivel piezométrico menos 1.

Las ecuaciones correspondientes son las siguientes

$$\begin{array}{ll} C_1: & H_{2-3} + H_{3-5} + H_{5-2} = 0 \\ C_2: & H_{2-5} + H_{5-7} + H_{7-2} = 0 \\ C_3: & H_{1-2} + H_{2-3} + H_{3-4} = H_1 - H_4 \\ C_4: & H_{1-2} + H_{2-7} + H_{7-8} = H_1 - H_8 \\ C_5: & H_{4-3} + H_{3-5} + H_{5-6} = H_4 - H_6 \end{array}$$

En cuanto a los gastos iniciales en los tramos, la selección se hace cuidando que se cumpla la ley de continuidad en los nudos y siguiendo los criterios sugeridos al final del apartado; dichos gastos se presentan en la figura 6.10.

b) En este caso se observan cuatro circuitos cerrados. En cuanto a los abiertos, aun en este caso es posible seguir la regla establecida en el inciso anterior; se tiene un sólo nudo en el cual el dato es el nivel piezométrico, por lo tanto la cantidad de circuitos abiertos a considerar es de cero; esto no quiere decir que ese dato no se empleará en la resolución del problema; en efecto, el mismo es necesario para conocer los niveles piezométricos en los nudos restantes, lo cual se hace con posterioridad al procedimiento iterativo. Las ecuaciones de circuito son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} C_1: & H_{1-2} + H_{2-3} + H_{3-1} = 0 \\ C_2: & H_{2-5} + H_{5-3} + H_{3-2} = 0 \\ C_3: & H_{2-5} + H_{5-4} + H_{4-3} = 0 \\ C_4: & H_{1-3} + H_{3-4} + H_{4-1} = 0 \end{array}$$

Para los gastos iniciales en los tramos se proponen los siguientes:

tramo	1-2	2-3	3-4	4-1	1-5	2-5	3-5	4-5
$Q \text{ (l/s)}$	-30	55	24	35	-15	-30	-21	-11

c) Para esta red se consideran tres circuitos cerrados y uno abierto cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} C_1: & H_{1-2} + H_{2-3} + H_{3-1} = 0 \\ C_2: & H_{1-5} + H_{5-2} + H_{2-1} = 0 \\ C_3: & H_{2-4} + H_{4-2} + H_{2-5} = 0 \\ C_4: & H_{6-4} + H_{4-3} + H_{3-1} + H_{1-3} + H_{3-7} = H_6 - H_7 \end{array}$$

Se proponen los siguientes gastos iniciales para los tramos:

tramo	2-3	1-2	2-5	2-4	1-3	1-5	4-5	4-6	7-3
$Q \text{ (l/s)}$	-70	15	10	25	-80	15	25	-50	200

d) El cambio que se propone en este inciso, lejos de complicar el problema, lo simplifica. En efecto, el gasto que entra a la red por el nudo 7, que ahora es dato del problema, coincide con el gasto en el tramo 3-7; por lo tanto puede calcularse también la pérdida en el mismo por una simple aplicación de la ecuación de resistencia al flujo

$$Q_{3-7} = Q_7$$

$$H_{3-7} = a_{3-7} Q_{3-7}^n$$

Pero además el gasto que sale (o entra) de la red por el nudo 6, también puede conocerse fácilmente. Dado que se conocen los gastos en todos los nudos menos uno, éste puede despejarse por aplicación del principio de continuidad a la red en su conjunto.

$$Q_6 = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_7)$$

$$Q_6 = -(5 \times 50 - 120) = 130 \text{ l/s}$$

Aplicando ahora el mismo recurso que en el caso del nudo 7, se pueden calcular directamente el gasto y la pérdida en el tramo 4-6

$$Q_{4-6} = Q_6$$

$$H_{4-6} = a_{4-6} Q_{4-6}^n$$

Ahora observe el lector lo siguiente: si ya se conocen el gasto y la pérdida en dos tramos, el cálculo de la red puede contraerse a los restantes; *de manera que la aplicación del método de Cross se hará sólo a una parte de la red, la formada por los tres circuitos cerrados*. Pero en tal caso los gastos en los nudos 3 y 4 deben incluir lo que llega a ellos por los tramos 7-3 y 6-4 respectivamente:

$$Q_3 = 50 - 120 = -70 \text{ l/s}$$

$$Q_4 = 50 - 130 = -80 \text{ l/s}$$

El gasto en los demás nudos permanece como en los datos originales:

$$Q_1 = Q_2 = Q_5 = 50 \text{ l/s}$$

Ahora si pueden plantearse las ecuaciones de circuito

$$C_1: H_{1-2} + H_{2-3} + H_{3-1} = 0$$

$$C_2: H_{2-5} + H_{5-4} + H_{4-2} = 0$$

$$C_3: H_{1-5} + H_{5-2} + H_{2-1} = 0$$

Se proponen los siguientes gastos iniciales:

tramo	2-3	1-2	2-5	2-4	1-3	1-5	4-5
Q (l/s)	-45	-15	30	-50	-25	-10	30

Se invita al lector a verificar que efectivamente se cumplen las ecuaciones de continuidad en los nudos en las soluciones propuestas en este problema.

Problema resuelto 6.7: Completar la resolución de la red de la figura 6.1.b conforme a los datos del inciso a) del problema anterior, a los cuales se agregan los siguientes:

ramo	diámetro (mm)	longitud (m)	ΣK
1-2	300	1,200	2.5
2-3	250	680	3.3
2-5	200	950	4.8
2-7	250	750	2.6
3-4	300	1,350	1.8
3-5	250	770	2.5
5-6	300	480	2.7
5-7	200	850	1.9
7-8	300	775	2.3

La tubería es de asbesto-cemento

Solución: Por ser este problema una continuación del inciso a) del problema precedente, ya no es necesario plantear las ecuaciones de circuito ni seleccionar los gastos iniciales. Sin embargo aún deben calcularse los coeficientes a de los tramos. Se empleará la fórmula de Darcy-Weisbach; el factor f se evaluará, como ya se ha hecho otras veces, suponiendo que la velocidad media en los tramos es de 1.5 m/s. La fórmula para el coeficiente a en este caso es la siguiente:

$$a = \frac{8}{n^2 g D^4} \left[\frac{fL}{d} + \Sigma K \right]$$

Tramo	ϵ/d	f	a
1-2	.000083	0.0145	617.8
2-3	0.0001	0.015	933.8
2-5	0.000125	0.0155	4,054
2-7	0.0001	0.015	1,008
3-4	0.000083	0.0145	684.7
3-5	0.0001	0.015	1,031
5-6	0.000083	0.0145	264.5
5-7	0.000125	0.0155	3,504
7-8	0.000083	0.0145	406

Los gastos iniciales, se recuerda, se presentan en la figura 6.10. Los cálculos se ordenan en la tabla 6.5, la cual se organiza de la siguiente manera:

- Se ocupa una página para cada aproximación; en cada una de ellas el cálculo de las correcciones ΔQ de los circuitos se ordena verticalmente.

- A su vez, cada recuadro correspondiente a una aproximación y un circuito es a su vez una tabla en la que se hace el cálculo de la corrección ΔQ .

- Para realizar cada uno de estos cálculos se disponen los tramos en filas y en las columnas se colocan: el gasto Q , el producto a $|Q|$ y el producto a $|Q|Q$; estos dos últimos son respectivamente los términos del denominador y del numerador de la fórmula de ΔQ (6.16 ó 6.18).

Se hará el seguimiento de los primeros cálculos para que el lector entienda mejor la elaboración de la tabla.

Se empieza por calcular la corrección ΔQ para el circuito C_2 , el cual se recorre *en el sentido de las agujas del reloj*; se recomienda adoptar este sentido para todos los casos. En la columna de gastos se ordenan los mismos, en los tramos 2-3 y 5-2 es negativo y positivo en el 3-5; como se ha hecho anteriormente estos valores se tabulan en litros por segundo aunque en las fórmulas intervienen en m^3/s ; luego se completan las otras dos columnas: a $|Q|$ y a $|Q|Q$; al pie del recuadro se suman estas cantidades, con las cuales se calcula la corrección ΔQ por la ecuación 6.16

$$\Delta Q = - \frac{-1.64}{2 \times 156.1} = 0.00526 \text{ m}^3/s = 5.26 \text{ l/s}$$

El cálculo de la corrección ΔQ para el circuito C_2 se hace de manera similar; sin embargo nótese que el gasto que figura en este recuadro para el tramo 5-2 no es el mismo que se lee en la figura 6.10; la razón es que este tramo es compartido con el circuito C_1 y, como se dijo más arriba, antes de proceder el cálculo de la corrección para el circuito siguiente, debe aplicarse la obtenida para el anterior. Si se llama $Q^{(1)}$ al gasto inicial, $Q^{(2)}$ al gasto corregido y ΔQ_{C1} a la corrección obtenida para el circuito C_1 , entonces es

$$Q_{2-3}^{(2)} = - (Q_{2-3}^{(1)} = - (Q_{2-3}^{(1)} + \Delta Q_{C1}) = - (-25 + 5.26) = 19.73 \text{ l/s}$$

La corrección para el circuito C_2 es:

$$\Delta Q = - \frac{-3.15}{2 \times 260.3} = 0.00605 \text{ m}^3/s = 6.05 \text{ l/s}$$

En el circuito C_3 el cálculo continúa de manera análoga; ahora es el tramo 3-2 el que se ve afectado por una corrección anterior:

$$Q_{3-2}^{(2)} = - Q_{3-2}^{(1)} = - (Q_{3-2}^{(1)} + \Delta Q_{C1}) = - (-20 + 5.26) = 14.73 \text{ l/s}$$

Para el cálculo de la corrección ΔQ debe usarse en este caso la ecuación 6.18 por tratarse de un circuito abierto, siendo H_o (nudo inicial) $= H_4 = 140 \text{ m}$ y H_u (nudo final) $= H_1 = 160 \text{ m}$

$$\Delta Q = - \frac{-6.85 - (140 - 160)}{2 \times 174.9} = -0.0376 \text{ m}^3/s = 37.6 \text{ l/s}$$

En el circuito C_4 es $H_o = H_1 = 160 \text{ m}$ y $H_u = H_8 = 110 \text{ m}$

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Primera aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	-20	18.66	-0.37	
	3-5	35	36.09	1.263	5.266
	5-2	-25	101.4	-2.53	
		Suma:	156.1	-1.64	
C2	2-5	19.73	80	1.579	
	5-7	27	94.61	2.554	605
	7-2	-85	85.68	-7.28	
		Suma:	260.3	-3.15	
C3	4-3	100	68.47	6.847	
	3-2	14.73	13.75	0.203	-37.6
	2-1	-150	92.67	-13.9	
		Suma:	174.9	-6.85	
C4	1-2	187.6	115.9	21,74	
	2-7	78.95	79.58	6.283	43.79
	7-8	74	30.04	2.223	
		Suma:	225.5	30.25	
C5	6-5	40	10.58	0.423	
	5-3	-40.3	41.51	-1.67	-58.4
	3-4	-62.4	42.73	-2.67	
		Suma:	94.82	-3.92	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Segunda aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	22.86	21.33	0.488	
	3-5	98.71	101.8	10.05	-17.2
	5-2	-25.8	104.5	-2.7	
		Suma:	227.6	7.839	
C2	2-5	43	174.3	7.497	
	5-7	33.05	115.8	3.827	4.666
	7-2	-123	123.7	-15.2	
		Suma:	413.9	-3.86	
C3	4-3	120.9	82.75	10	
	3-2	-5.64	5.263	-0.03	6.723
	2-1	-231	-143	-33.1	
		Suma:	231	-23.1	
C4	1-2	224.7	138.8	31.18	
	2-7	118.1	119	14.05	-1.42
	7-8	117.8	47.82	5.633	
		Suma:	305.6	50.87	
C5	6-5	-18.4	4.88	-0.09	
	5-3	-18.5	84.04	-6.85	8.744
	3-4	-128	87.35	-11.1	
		Suma:	176.3	-18.1	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Tercera aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	-1.08	1.011	0	
	3-5	72.75	75.01	5.457	6.974
	5-2	-47.7	193.2	-9.21	
		Suma:	269.3	-3.76	
C2	2-5	40.69	165	6.714	
	5-7	37.72	132.2	4.984	2.434
	7-2	-117	117.6	-13.7	
		Suma:	414.7	-2.02	
C3	4-3	118.8	81.37	9.669	
	3-2	-5.89	5.498	-0.03	2.562
	2-1	-223	137.9	30.8	
		Suma:	224.8	-21.2	
C4	1-2	220.7	136.3	30.09	
	2-7	114.2	115.1	13.15	2.118
	7-8	116.4	47.25	5.498	
		Suma:	298.7	48.73	
C5	6-5	-9.71	2.567	-0.02	
	5-3	-79.7	82.2	-6.55	4.971
	3-4	-121	83.12	-10.1	
		Suma:	167.9	-16.7	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Cuarta aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	3.329	3.107	0.01	
	3-5	74.76	77.07	5.762	3.468
	5-2	-43.1	174.8	-7.54	
		Suma:	255	-1.77	
C2	2-5	39.66	160.8	6.377	
	5-7	40.15	140.7	5.649	1.931
	7-2	-116	117.3	-13.6	
		Suma:	418.7	-1.62	
C3	4-3	116.4	79.72	9.281	
	3-2	-6.8	6.343	-0.04	3.192
	2-1	-223	137.6	-30.7	
		Suma:	223.7	-21.4	
C4	1-2	219.6	135.7	29.79	
	2-7	114.4	115.3	13.19	2.194
	7-8	118.5	48.11	5.7	
		Suma:	299.1	48.69	
C5	6-5	-4.73	1.252	0	
	5-3	-78.2	80.65	-6.31	3.394
	3-4	-120	81.9	-9.8	
		Suma:	163.8	-16.1	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Quinta aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	3.605	3.364	0.012	
	3-5	74.83	77.15	5.773	2.464
	5-2	-41.6	168.6	-7.01	
		Suma:	249.1	-1.23	
C2	2-5	39.13	158.6	6.207	
	5-7	42.08	147.5	6.205	1.526
	7-2	-117	117.5	-13.7	
		Suma:	423.6	-1.29	
C3	4-3	116.2	79.58	9.249	
	3-2	-6.07	5.663	-0.03	2.649
	2-1	-222	137	-30.4	
		Suma:	222.3	-21.2	
C4	1-2	219.1	135.4	29.67	
	2-7	115.1	116	13.35	1.778
	7-8	120.7	49	5.913	
		Suma:	300.4	48.93	
C5	6-5	-1.34	0.355	0	
	5-3	-77.3	79.69	-6.16	2.588
	3-4	-119	81.39	-9.68	
		Suma:	161.4	-15.8	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Sexta aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	3.42	3.192	0.011	
	3-5	74.71	77.02	5.754	1.908
	5-2	-40.7	164.8	-6.7	
		Suma:	245	-0.94	
C2	2-5	38.75	157.1	6.086	
	5-7	43.61	152.8	6.663	1.186
	7-2	-117	117.8	-13.8	
		Suma:	427.7	-1.01	
C3	4-3	116.3	79.62	9.259	
	3-2	-5.33	4.973	-0.03	2.085
	2-1	-221	136.5	-30.2	
		Suma:	221.1	-20.9	
C4	1-2	218.8	135.2	29.59	
	2-7	115.7	116.6	13.49	1.39
	7-8	122.5	49.72	6.089	
		Suma:	301.5	49.16	
C5	6-5	1.247	0.33	4e-04	
	5-3	-76.6	78.99	-6.05	2.011
	3-4	-118	81.05	-9.59	
		Suma:	160.4	-15.6	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Séptima aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	3.244	3.027	0.01	
	3-5	74.6	76.92	5.738	1.481
	5-2	-39.9	161.9	-6.46	
		Suma:	241.8	-0.72	
C2	2-5	38.45	155.9	5.994	
	5-7	44.79	157	7.031	0.914
	7-2	-117	118	-13.8	
		Suma:	430.8	-0.79	
C3	4-3	116.4	79.67	9.27	
	3-2	-4.73	4.409	-0.02	1.624
	2-1	-220	136.1	-30	
		Suma:	220.1	-20.7	
C4	1-2	218.6	135.1	29.52	
	2-7	116.1	117.1	13.6	1.077
	7-8	123.8	50.28	6.228	
		Suma:	302.4	49.35	
C5	6-5	3.259	0.862	0.003	
	5-3	-76.1	78.44	-5.97	1.551
	3-4	-118	80.78	-9.53	
		Suma:	160.1	-15.5	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Octava aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	3.101	2.894	0.009	
	3-5	74.53	76.84	5.727	1.14
	5-2	-39.4	159.6	-6.28	
		Suma:	239.3	-0.55	
C2	2-5	38.22	155	5.923	
	5-7	45.71	160.2	7.32	0.7
	7-2	-117	118.2	-13.9	
		Suma:	433.3	-0.61	
C3	4-3	116.4	79.72	9.282	
	3-2	-4.24	3.958	-0.02	1.255
	2-1	-220	135.7	-29.8	
		Suma:	219.4	-20.6	
C4	1-2	218.4	134.9	29.48	
	2-7	116.5	117.5	13.69	0.828
	7-8	124.9	50.72	6.336	
		Suma:	303.1	49.5	
C5	6-5	4809	1.272	0.006	
	5-3	-75.7	78.02	-5.9	1.192
	3-4	-118	80.58	-9.48	
		Suma:	159.9	-15.4	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Novena aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	2.986	2.787	0.008	
	3-5	74.48	76.79	5.719	0.873
	5-2	-38.9	157.8	-6.14	
		Suma:	237.4	-0.41	
C2	2-5	38.05	154.3	5.87	
	5-7	46.41	162.6	7.546	0.534
	7-2	-117	118.3	-13.9	
		Suma:	435.2	-0.46	
C3	4-3	116.5	79.76	9.292	
	3-2	-386	3.602	-0.01	0.964
	2-1	-219	135.5	-29.7	
		Suma:	218.8	-20.4	
C4	1-2	218.3	134.9	29.44	
	2-7	116.8	117.7	13.75	0.634
	7-8	125.8	51.06	6.421	
		Suma:	303.7	49.61	
C5	6-5	6.001	1.587	0.01	
	5-3	-75.4	77.69	-5.85	0.912
	3-4	-117	80.42	-9.45	
		Suma:	159.7	-15.3	

Tabla 6.5
Problema Resuelto 6.7 (Método de Cross)
Decimoctava aproximación

Circuito	Tramo	Q (l/s)	$a Q $	$a Q Q$ (m)	ΔQ (l/s)
C1	2-3	2.621	2.446	0.006	
	3-5	74.33	76.64	5.697	0.072
	5-2	-37.6	152.5	-5.74	
		Suma:	231.6	-0.03	
C2	2-5	37.55	152.2	5.715	
	5-7	48.44	169.7	8.221	0.044
	7-2	-118	118.7	-14	
		Suma:	440.6	-0.04	
C3	4-3	116.7	79.91	9.327	
	3-2	-269	2.514	0	0.081
	2-1	-218	134.7	-29.4	
		Suma:	217.1	-20	
C4	1-2	217.9	134.6	29.33	
	2-7	117.7	118.6	13.96	0.053
	7-8	128.2	52.04	6.671	
		Suma:	305.3	49.97	
C5	6-5	9.485	2.509	0.024	
	5-3	-74.4	76.71	-5.71	0.076
	3-4	-117	79.97	-9.34	
		Suma:	159.2	-15	

entonces:

$$\Delta Q = -\frac{30.25 - (160 - 110)}{2 \times 225.5} = 0.04379 m^3/s = 43.79 l/s$$

Procediendo de manera análoga se completa la primera aproximación y luego se procede con las siguientes, incorporando las correcciones a los gastos conforme se van calculando.

Se requieren 9 aproximaciones para que las correcciones en todos los tramos sean inferiores a un litro por segundo; a partir de aquí se omiten las páginas siguientes y sólo se presenta la 18va. para la cual la corrección es inferior a 0.1 l/s en todos los tramos. Como puede apreciarse la convergencia no es precisamente rápida y la precisión que se pretenda alcanzar tendrá influencia apreciable en la cantidad de tanteos.

Los resultados que se pueden extraer de la última página de la tabla son los siguientes (Los gastos pueden verse también en la figura 6.11):

Tramo	pérdida (m)	gasto (l/s)
1-2	29.33	218
2-3	0.006	2.69
2-5	5.71	37.55
2-7	13.96	117.7
3-4	-9.34	-117
3-5	5.70	74.33
5-6	-0.02	-9.48
5-7	8.22	48.44
7-8	6.67	128.2

El lector puede comprobar la veracidad de estos datos reemplazando estos valores en las ecuaciones de tramos, nudo y circuito válidas para esta red.

Finalmente faltaría obtener los gastos y los niveles piezométricos en los nudos en los que dichas variables se desconocen. Esto es muy simple ya que los cálculos pueden hacerse en forma consecutiva aplicando la ecuación de continuidad o la de energía según corresponda:

$$Q_1 = -Q_{1-2} = -218 l/s$$

$$Q_4 = -Q_{4-3} = -117 l/s$$

$$Q_8 = -Q_{8-7} = 128.2 l/s$$

$$Q_6 = -Q_{6-5} = -9.48 l/s$$

$$H_2 = H_1 - H_{1-2} = 160 - 29.33 = 130.67 \text{ m}$$

$$H_3 = H_4 - H_{4-3} = 140 - 9.34 = 130.66 \text{ m}$$

$$H_5 = H_6 - H_{6-5} = 125 - 0.02 = 124.98 \text{ m}$$

$$H_7 = H_8 - H_{8-7} = 110 + 6.67 = 116.67 \text{ m}$$

6.7 Otros métodos de resolución de redes

Después del célebre trabajo de Hardy-Cross han sido propuestos diversos métodos para la resolución de redes. A este respecto el advenimiento de las computadoras con las inmensas posibilidades del cálculo automático, constituye un factor fundamental que ha permitido el diseño de algoritmos cada vez más eficientes y capaces. Hoy en día se resuelven redes de varios cientos de tramos sin requerir más ayuda que la de una computadora personal. Sin embargo, los problemas que han debido superarse y que a menudo todavía se presentan son notables y han sido objeto de estudio y análisis durante las últimas décadas. De éstos sin duda el más relevante es el de la *convergencia* del cálculo hacia la solución real. En el ejemplo que se ha resuelto por el método de Cross se pudo apreciar que la convergencia es bastante lenta y algo que tal vez habrá llamado la atención del lector es que una vez que se alcanza una aproximación medianamente buena de 1 litro por segundo en la novena iteración, se requieren otras 9 para que el error descienda a 0.1 l/s. En ocasiones no existe convergencia en absoluto y es preciso abandonar el cálculo.

Algo que sin duda ha constituido un desafío para los calculistas es la modelación de ciertos accesorios que se emplean en redes de abastecimiento de agua con diversos fines, tales como válvulas antirretorno, válvulas reductoras de presión y estaciones de bombeo. En las primeras el flujo puede ir en un sentido pero se ve impedido de ir en el opuesto; el efecto de las válvulas reductoras es el de un descenso localizado de la presión en la línea; finalmente en los nudos correspondientes a estaciones de bombeo el dato no es el gasto ni la pérdida sino una relación entre ambos ($H_i = f(Q_i)$).

6.7.1 Clasificación de los métodos

Don Wood, en su excelente trabajo correspondiente a la referencia [40], hace una clasificación de los algoritmos de resolución de redes existentes a esa fecha, a los que divide en cinco grupos. Son los cinco primeros que se incluyen a continuación; el sexto corresponde a una metodología desarrollada en años recientes.

a) **Métodos de ajuste consecutivo de las ecuaciones de circuito (C-C):** El ejemplo clásico para este grupo es el propio método de Cross, en el cual se calcula una cierta corrección circuito, por circuito hasta llegar a la solución.

b) **Métodos de ajuste consecutivo de las ecuaciones de nudo (M-C):** El mismo Hardy Cross propuso, años más tarde de su primer trabajo, un segundo método en el cual se sigue el camino inverso al adoptado para el primero. Se hará una breve presentación del mismo. Se parte de las ecuaciones de tramo en su forma 6.2

$$Q_{i-j} = \left[\frac{H_{i-j}}{a_{i-j}} \right]^{1/n}$$

¹ Se hace aquí una traducción libre de la terminología propuesta por Don Wood ya que la misma no está generalizada en español. En los distintos incisos se indica el nombre del método y entre paréntesis una forma abreviada para hacer referencia a él en lo sucesivo.

Estas a su vez se reemplazan en las ecuaciones de nudos 6.5. Se tomará por ejemplo el nudo 2 de la figura 6.1.b, que es el caso del último problema resuelto

$$Q_2 + Q_{2-1} + Q_{2-3} + Q_{2-5} + Q_{2-7} = 0$$

o bien, para que todos los gastos sean cantidades positivas,

$$Q_2 - Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{2-5} + Q_{2-7} = 0$$

Efectuando el reemplazo:

$$Q_2 - \left[\frac{H_{1-2}}{a_{1-2}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_{2-3}}{a_{2-3}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_{2-5}}{a_{2-5}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_{2-7}}{a_{2-7}} \right]^{1/n} = 0 \quad (6.20)$$

Dado que las pérdidas H_{ij} se desconocen, el primer paso del problema es suponer valores arbitrarios para los niveles piezométricos en los nudos, que se designarán $H_i^{(1)}$; las pérdidas pueden calcularse fácilmente como

$$H_{i-j}^{(1)} = H_i^{(1)} - H_j^{(1)}$$

Estos valores no son los verdaderos, ya que se obtienen a partir de cargas supuestas; la diferencia entre la pérdida real y la ficticia para cada tramo es una corrección ΔH_{i-j}

$$H_{i-j} = H_{i-j}^{(1)} + \Delta H_{i-j}$$

Ahora bien, si se aplica a cada una de las ecuaciones de nudo una corrección única ΔH se obtendrán nuevos valores de las pérdidas que no serán los reales sino otras que se llamarán

$$H_{i-j}^{(2)} = H_{i-j}^{(1)} + \Delta H \quad (6.21)$$

Si la corrección ΔH se calcula por algún método razonable, estas nuevas pérdidas serán más aproximadas a las reales que las anteriores $H_{i-j}^{(1)}$. Un criterio acertado para efectuar este cálculo consiste en reemplazar la 6.21 en la 6.20 y despejar ΔH de la misma

$$Q_2 = \left[\frac{H_{1-2}^{(1)} - \Delta H}{a_{1-2}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_{2-3}^{(1)} + \Delta H}{a_{2-3}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_{2-5}^{(1)} + \Delta H}{a_{2-5}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_{2-7}^{(1)} + \Delta H}{a_{2-7}} \right]^{1/n} = 0$$

Si el lector compara esta deducción con la que se hizo en el apartado anterior, verá que se está siguiendo un camino muy parecido. Para despejar ΔH de esta ecuación también se toman los dos primeros términos del desarrollo de la potencia del binomio en cada término; de este modo se obtiene una fórmula explícita análoga a la 6.15. Resumiendo puede proponerse el siguiente algoritmo:

- i) Se identifican los nudos de la red en los que se planteará la ecuación respectiva.
- ii) Se asumen valores arbitrarios para las cargas piezométricas en los nudos (salvo en los que sean dato).
- iii) Se calculan las pérdidas en los tramos por diferencia de cargas.
- iv) Se calcula la corrección ΔH para el primer nudo y se aplica a los tramos correspondientes.
- v) Se repite el paso anterior para el resto de los nudos con lo cual se completa la primera iteración.
- vii) Se repite la rutina hasta que las correcciones ΔH para todas las ecuaciones de nudo sean despreciables.

Una diferencia básica que puede apreciarse entre este algoritmo y el del primer método de Cross es que en aquel caso los gastos supuestos $Q_{i-1}^{(1)}$ debían satisfacer las ecuaciones de nudo, mientras que aquí las cargas piezométricas supuestas son arbitrarias, aunque es conveniente asignarlas con un criterio adecuado.

c) **Métodos de ajuste simultáneo de las ecuaciones de circuito (C-S):** Se considerará una vez más el ejemplo de la figura 6.1.b con los gastos iniciales de la figura 6.10; se reemplazarán las ecuaciones 6.13 en las de circuito; para el C_1 se obtiene

$$-a_{2-3}(Q_{2-3}^{(1)} - \Delta Q_{2-3})^n + a_{3-5}(Q_{3-5}^{(1)} + \Delta Q_{3-5})^n - \\ -a_{5-2}(Q_{5-2}^{(1)} - \Delta Q_{5-2})^n = 0$$

La diferencia formal entre esta ecuación y la 6.15, que sirve de base al método de Cross es que aquí se considera una corrección diferente para cada tramo. Son muchas incógnitas para una sola ecuación; algunas pueden eliminarse efectuando el balance de estas correcciones en los nudos; por ejemplo para el nudo 3 es

$$\Delta Q_{2-3} = \Delta Q_{3-4} + \Delta Q_{3-5}$$

Si además se plantea el resto de las ecuaciones de circuito en las mismas condiciones, se tendrá igual número de ecuaciones que de incógnitas, igual a su vez a la cantidad de circuitos considerados. Se hace una aproximación lineal de las ecuaciones y se resuelven simultáneamente. De esta manera se obtendrán al mismo tiempo las correcciones ΔQ para todos los tramos a diferencia de lo que ocurría en el método de Cross, en el que este cálculo se hacía circuito por circuito.

d) **Métodos de ajuste simultáneo de las ecuaciones de nudo (N-S):** Si en las ecuaciones 6.20 se reemplaza cada pérdida por la diferencia de carga en los nudos extremos se obtiene

$$Q_2 + \left[\frac{H_2 - H_1}{a_{2-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_2 - H_3}{a_{2-3}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_2 - H_5}{a_{2-5}} \right]^{1/n} + \left[\frac{H_2 - H_7}{a_{2-7}} \right]^{1/n} = 0$$

Proponiendo una aproximación similar a la hecha en los incisos anteriores, esta ecuación se puede transformar en una expresión linealizada en la que las incógnitas serán las correcciones ΔH_i para el nivel piezométrico de cada nudo. Haciendo lo propio con las demás ecuaciones de nudo se obtiene el sistema a resolver; la cantidad de ecuaciones es igual a la de nudos (en los que no es dato el nivel piezométrico).

e) **Método lineal (L)**: Don Wood llama así a un método propuesto por él [41], en el cual el sistema incluye las ecuaciones de nudo más las de circuito. Las de tramo se sustituyen en las segundas. El nombre de *lineal* que recibe el método se debe a que se supone una relación lineal entre la pérdida y el gasto, como si se tratara de flujo laminar. Las ecuaciones de tramo se escriben como

$$H_{i-j} = K_{i-j} Q_{i-j}$$

donde

$$K_{i-j} = a_{i-j} |Q_{i-j}|^{n-1}$$

Si se reemplazan estas ecuaciones en las de circuito el siguiente sería un ejemplo de cómo quedaría conformado el sistema, siempre para el caso de la figura 6.1.b (El coeficiente de Don Wood se llamará $K_{(m)}$ ya que en cada iteración se emplea una aproximación del mismo y no su valor real)

$$Q_1 + Q_{2-1} + Q_{2-3} + Q_{2-5} + Q_{2-7} = 0$$

$$Q_3 + Q_{3-2} + Q_{3-4} + Q_{3-5} = 0$$

$$Q_5 + Q_{5-2} + Q_{5-3} + Q_{5-6} + Q_{5-7} = 0$$

$$Q_7 + Q_{7-2} + Q_{7-5} + Q_{7-8} = 0$$

$$K_{2-3}^{(m)} Q_{2-3} + K_{3-5}^{(m)} Q_{3-5} + K_{5-2}^{(m)} Q_{5-2} = 0$$

$$K_{2-5}^{(m)} Q_{2-5} + K_{5-7}^{(m)} Q_{5-7} + K_{7-2}^{(m)} Q_{7-2} = 0$$

$$K_{1-2}^{(m)} Q_{1-2} + K_{2-3}^{(m)} Q_{2-3} + K_{3-4}^{(m)} Q_{3-4} = H_1 - H_4$$

$$K_{1-2}^{(m)} Q_{1-2} + K_{2-3}^{(m)} Q_{2-7} + K_{7-8}^{(m)} Q_{7-8} = H_1 - H_8$$

$$K_{4-3}^{(m)} Q_{4-3} + K_{3-5}^{(m)} Q_{3-5} + K_{5-6}^{(m)} Q_{5-6} = H_4 - H_6$$

Como se puede analizar la cantidad de ecuaciones y de incógnitas es igual a la de tramos; normalmente en las redes la cantidad de tramos es mayor que la de nudos y ésta a su vez es mayor que la de circuitos, por lo tanto se obtiene una matriz de mayor rango que en los dos incisos anteriores. En este caso no es necesario hacer ninguna presunción inicial sobre los gastos o las cargas piezométricas en los nudos. Lo que propone Don Wood es...

- que en la primera *aproximación* se tome $K_{i-j} = a_{i-j}$

- que en las *aproximaciones* subsecuentes se tome

(6.22)

$$K_{i-j}^{(m)} = a_{i-j} \frac{|Q_{i-j}^{(m-1)}| + |Q_{i-j}^{(m-2)}|}{2}$$

donde el símbolo m significa que se trata de la m -ésima aproximación.

En cada iteración se debe resolver en forma simultánea el sistema escrito más arriba; al cabo de varias se llegará a la solución del problema

f) **Método del elemento (E)**: El método de *elementos finitos* ha adquirido gran desarrollo en los últimos años para la integración de ecuaciones diferenciales de varias variables. Una red de tubos a presión no es el tipo de problemas que se resuelve con dicha técnica numérica, la cual que se aplica a casos en los que el dominio de integración es continuo. Ahora bien, lo que hace aquel método es dividir el dominio en elementos, formando una especie de rompecabezas; en esa etapa del proceso el problema se parece un poco más al de una red, en la cual los elementos serían los tramos. Diversos investigadores [42], concientes de esto, buscaron adaptar al cálculo de redes las técnicas de resolución desarrolladas para el método de elementos finitos. El resultado es la conformación de un sistema de ecuaciones similar al planteado para el método lineal del inciso anterior. La diferencia radica principalmente en el método de aproximación.

6.7.2 Técnicas de optimización

Independientemente del método que se adopte para la resolución de una red, su eficiencia se puede mejorar empleando determinadas técnicas de aproximación, relajación o conformación de la matriz entre otras cosas.

En los apartados precedentes se ha visto la forma de obtener la corrección ΔQ que propone Cross (ecuaciones 6.16 ó 6.18) así como la aproximación propuesta por Don Wood (ecuación 6.22) en la que se promedian los gastos de las dos iteraciones previas para calcular el que será utilizado a continuación.

Un método de aproximación muy utilizado por su rapidez de convergencia es el de Newton-Raphson aplicado a una función de múltiples variables. Para introducir al lector en el tema, se recordará como opera este para el caso de una variable. En la figura 6.12 se representa una función cualquiera del tipo $y = f(x)$. Supóngase que se desea encontrar el valor x_0 para el cual dicha función vale cero; entonces se comienza por proponer un valor aproximado que se llamará x_1 , y luego se traza la tangente a la curva correspondiente a esa abscisa. La pendiente de esta recta es igual a la derivada de la función en ese punto $f'(x_1)$; haciendo un simple cálculo trigonométrico, puede encontrarse el valor de x_2 por donde dicha recta corta al eje x

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (6.23)$$

x_2 es un valor más aproximado a la raíz x_0 que el anterior x_1 , y si se hace un nuevo cálculo similar al que acaba de describirse, podrá encontrarse un x_3 aún más cercano; cuando los valores correspondientes a dos iteraciones sucesivas x_{n-1} y x_n sean prácticamente iguales, se habrá llegado a la solución del problema. El método de Newton-Raphson converge muy rápidamente en funciones una variable. En el caso de varias variables su empleo es en general conveniente aunque la rapidez de convergencia no está garantizada. Esta técnica se aplica por ejemplo en el método de elemento.²

Otro recurso que ayuda a llegar con más rapidez a la solución del problema es el empleo de un *factor de relajación* en el cálculo de los gastos o cargas piezométricas que serán empleados en la siguiente iteración. Es decir que en lugar de aplicar como ejemplo la corrección ΔQ en el método de Cross, se aplica la misma multiplicada por un factor fr

$$Q_{i,j}^{(2)} = Q_{i,j}^{(1)} + fr \Delta Q$$

El objeto de la relajación es mejorar la convergencia, especialmente en casos en que la solución es *oscilante*; actúa como una especie de amortiguador. Diversos trabajos se han realizado para encontrar el valor óptimo para este factor y los resultados son variables y dependen del método que se utilice; en algunos casos llega a ser mayor que uno.

En los métodos de resolución simultánea (C-S, N-S, L y E) es importante aplicar un procedimiento eficiente para la resolución del sistema de ecuaciones. Esto empieza por buscar, un adecuado ordenamiento de las filas y columnas de la matriz correspondiente; en lugar de hacerlo arbitrariamente se pueden emplear algoritmos que arrojan matrices triangulares o simétricas, las cuales pueden resolverse con ahorro de memoria de máquinas y tiempo de ejecución.

² El lector podrá encontrar más información sobre este y otros métodos de aproximación de raíces en las referencias [37] y [38].

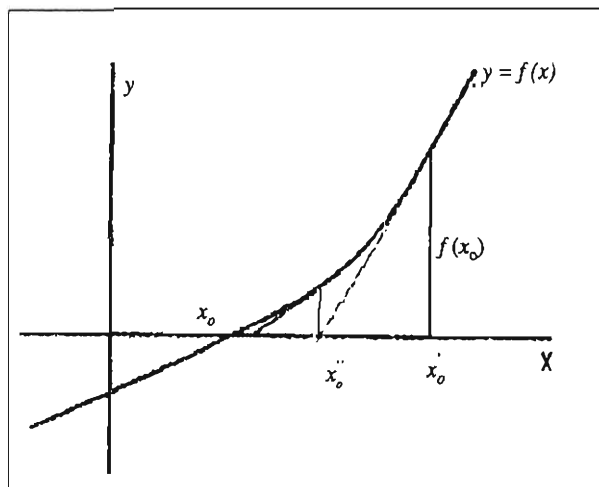


Figura 6.12: Aproximación de Newton-Raphson para una función de una variable.

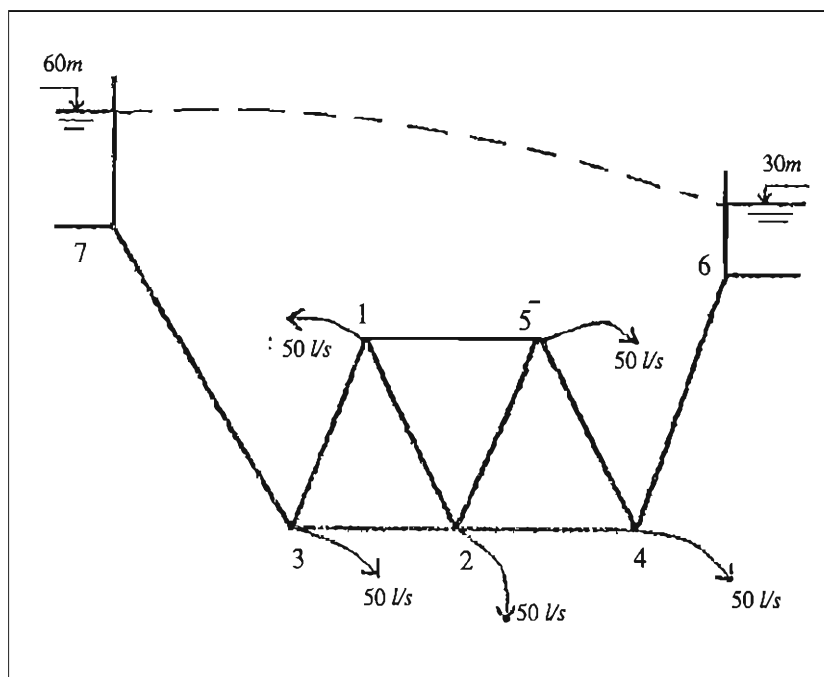


Figura 6.13: Ejemplo de red elegido para comparar el método de Cross con el método C-S.

6.7.3 Análisis comparativo

En la referencia [40] se reporta un trabajo muy extenso en el que se calcula un gran número de redes grandes y pequeñas por diversos métodos (C-C, N-C, C-S, N-S y L). La condición impuesta para alcanzar la convergencia fue la siguiente:

$$D = \frac{\sum |Q_{i-j}^{(m)} - Q_{i-j}^{(m-1)}|}{\sum |Q_{i-j}^{(m)}|} \leq 0.005 \quad (6.24)$$

Esto es simplemente un criterio; así por ejemplo, que se alcance esta precisión no significa que lo sea en forma pareja para todos los tramos; en algunos casos se obtiene una convergencia muy buena en un sector de la red y no en otros. Algunos de los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- El método lineal resultó ser el mejor; se alcanza la aproximación indicada en la ecuación 6.24 en un promedio de 6.5 iteraciones independientemente del tamaño de la red. La desventaja es que se requiere una capacidad de memoria importante ya que el sistema incluye las ecuaciones de circuito más las de nudo; sin embargo en los últimos años los progresos alcanzados en la tecnología de computadoras hacen que este problema sea cada vez menos relevante.

- El método de resolución simultánea de ecuaciones de circuito (C-S) también probó ser eficiente, el número de iteraciones resultó en promedio de 8.5, o sea ligeramente mayor que para el método lineal; sólo se registró un caso sobre 60 en el que no se alcanzó la solución. Por contraste con el método anterior este es el que requiere el sistema de ecuaciones más compacto, pues la cantidad de ecuaciones de circuito es, salvo casos muy atípicos, menor que la de ecuaciones de nudos; sin embargo requiere de una rutina de cálculo adicional para efectuar el balance de gastos en los nudos.

- El método de resolución simultánea de ecuaciones de nudos (N-S) también es eficiente pero es considerable el número de casos en los que no se alcanza la solución en un número razonable de iteraciones, sobre todo cuando existen tramos que conducen gastos elevados con bajas pérdidas.

- El método de Cross (C-C) resultó menos eficiente que los anteriores; la cantidad de iteraciones requerida en los casos calculados es del orden de ocho veces mayor pero además depende mucho del tamaño de la red; son notables los casos en los que no se alcanza la solución en un tiempo razonable, sobre todo en redes que contienen tanques de almacenamiento.

- El método de resolución consecutiva de ecuaciones de nudos resultó ser el menos eficiente y menos confiable de todos. Sin embargo debe recordarse que este y el anterior son los que se adaptan al cálculo manual.

En la referencia [42] se hace a su vez una comparación de los métodos lineal y de elementos. El resultado es que ambos son eficientes pero el de elementos requiere menor cantidad de iteraciones para alcanzar altos grados de precisión.

A fin de ilustrar un poco lo dicho, se resolverá la red de la figura 6.13, la cual posee 9 tramos, 7 nudos y cuatro circuitos, uno de ellos abierto. El cálculo se hará por el método de Cross por un lado y por un algoritmo desarrollado por el autor ([43] y [44]), el cual se clasifica como método de resolución simultánea de las ecuaciones de circuito (C-S). El objetivo es determinar la cantidad de iteraciones que se requieren para alcanzar el grado de convergencia establecido por la ecuación 6.22.

La variante del método C-S que aquí se usará no requiere de supuestos sino que el propio algoritmo obtiene los gastos iniciales en los tramos; a fin de hacer una comparación más genuina, se adoptarán los mismos que la primera iteración del método de Cross. El siguiente listado muestra los datos considerados para el problema incluyendo los mencionados gastos iniciales.

Tramo	longitud (m)	diámetro (mm)	factor de fricción	coefic. a	gasto inicial (l/s)
2-3	200	200	0.015	807	47
1-2	200	200	0.015	807	191
2-5	200	200	0.015	807	47
2-4	200	200	0.015	807	47
1-3	200	200	0.015	807	47
1-5	200	200	0.015	807	-288
4-5	200	200	0.015	807	291
4-6	200	200	0.015	807	-294
3-7	200	200	0.015	807	94

Tabla 6.6
Comparación de métodos de resolución de redes
Método de Cross

Tramo		Gastos en l/s en cada iteración			
		I	II	III	IV
2-3	47	29.4	6.9	-50.6	-75.4
1-2	77.7	34.6	42.6	13.6	4
2-5	47	43.7	10.3	18.4	31.1
2-4	47	-63	-55.1	-32.6	-17
1-3	64.6	-36.5	-84.3	-78.6	-82.5
1-5	-288	-51.1	79.7	68.2	50.7
4-5	181	65.2	-17.5	-20.9	-17.6
4-6	-294	-170	-65.1	-46	-35.1
3-7	94	-29.7	-135	-154	-165

V	VI	VII	VIII	IX	Tramo
-82.3	-84.6	-85.9	-86.4	-86.6	2-3
7.1	9.8	10.3	10.3	10.4	1-2
32.2	28.8	25.5	24.1	23.7	2-5
-2.8	10.6	18.9	22.1	23.1	2-4
-84.5	-85.5	-85.9	-86	-86.1	1-3
39.7	31.9	27.9	26.4	25.9	1-5
-8.5	-2.4	-0.2	0.5	0.7	4-5
-30.9	-28.7	-27.7	-27.4	-27.3	4-6
-169	-171	-172	-173	-173	3-7

Gastos en l/s en cada iteración								
Tramo	I	II	III	IV	V	VI	VII	
2-3	47	-47.1	-90.6	-85.6	-86.2	-86.6	-86.6	-86.6
1-2	191	103	71.4	44	25	14.5	10.6	10.5
2-5	47	42.9	38.6	13.7	19.8	22.3	23.1	23.5
2-4	47	57.2	73.4	65.9	40.9	28.5	24.1	23.6
1-3	47	-16.9	-73.9	-78.3	-85.3	-85.8	-86	-86
1-5	-288	-136	-47.5	-15.7	10.8	21.6	25.4	25.5
4-5	291	143	58.9	52	19.4	6.1	1.5	1
4-6	-294	-136	-35.5	-36.1	-28.5	-27.6	-27.4	-27.4
3-7	94	-64	-164	-164	-171	-172	-173	-173

En la tabla 6.6 se presentan los resultados; se indican los gastos en los tramos para cada iteración. Como se aprecia el método de Cross requiere de 9 iteraciones y el método C-S necesita 7. La diferencia como era de esperar, está a favor del segundo método aunque no es muy notable, tan sólo dos iteraciones; sin embargo ello se debe seguramente a que se trata de una red de pocos tramos; el contraste es más agudo en redes grandes.

Resumen del Capítulo

* Una red de tubos a presión es un arreglo de tramos de tubería dispuestos en forma arbitraria.

* Los tres tipos de elementos que forman una red son: los tramos, los nudos, que son las secciones extremas de éstos y los circuitos que son asociaciones de tramos alineados. Se llama circuito cerrado a aquél que forma un anillo cerrado.

* Las redes que no poseen circuitos cerrados se llaman redes abiertas y las que poseen al menos uno se llaman redes cerradas.

* La principal aplicación de las redes se refiere a sistemas de distribución de agua.

* El sistema de ecuaciones que gobierna una red está compuesto por tres tipos de ecuaciones: las de tramo, las de nudo y las de circuito, que representan respectivamente la ley de resistencia al flujo y los principios de conservación de la masa y energía.

* Las ecuaciones de tramo son no lineales y esto hace particularmente difícil la resolución de una red, lo cual requiere en cualquier caso de un procedimiento de aproximaciones sucesivas.

* Generalmente los problemas de cálculo de redes tienen como datos las características físicas de la red y las cargas en los nudos; éstas pueden ser el nivel piezométrico del nudo o el gasto que entra o sale de la red por él. Las incógnitas son las pérdidas y gastos de los tramos, así como los niveles piezométricos y gastos en los nudos que no son datos.

* Las redes abiertas son más sencillas de resolver en general; normalmente requieren de hacer una hipótesis para la carga en un nudo y a partir de ahí calcular el resto de las variables hasta llegar a una condición de cierre; si ésta no se cumple se debe reiniciar el cálculo asumiendo un nuevo valor para aquella carga.

* La más sencilla de las redes abiertas es el problema de los tres depósitos.

* El método más popular para el cálculo de redes cerradas es el de Hardy Cross, que consiste en suponer gastos en los tramos que cumplan con la ley de continuidad y luego aplicarles correcciones que surgen de efectuar un balance de energía circuito por circuito.

* El método de Hardy Cross está adaptado al cálculo manual pero no siempre es eficaz ya que la convergencia puede ser muy lenta y depende del tamaño de la red.

* Los diversos métodos conocidos para el cálculo de redes pueden clasificarse en los siguientes grupos: de ajuste consecutivo de las ecuaciones de circuito, de ajuste consecutivo de las ecuaciones de nudo, de ajuste simultáneo de las ecuaciones de circuito, de ajuste simultáneo de las ecuaciones de nudo, lineal y de elementos. Los cuatro últimos requieren del auxilio de la computadora pero son más eficaces, sobre todo en el cálculo de grandes redes.

* Existen diversas técnicas de optimización que pueden aplicarse a estos métodos; una de ellas es el factor de relajación que se aplica a las correcciones.

Problemas propuestos

(Advertencia: Algunos de los problemas que se presentan a continuación son de resolución muy larga; por lo tanto se sugiere al lector empezar por plantear la rutina de cálculo y en todo caso luego completarlos con la resolución numérica)

6.1 Plantear las ecuaciones de circuito de las redes de la figura 6.14 para su resolución por el método de Hardy Cross (Suponer que la carga piezométrica es dato en los extremos de las antenas y que el gasto lo es en los nudos de grado 2 o más)

6.2 Resolver la red de la figura 6.15, en la que la tubería es de PVC; los tramos 7-8 y 8-9 son de 300 mm de diámetro y 700 m de longitud de cálculo cada uno; los demás son de 150 mm y 500 m de longitud de cálculo. No hay gasto de salida por los nudos 7, 8 y 9

6.3 La bomba b de la figura 6.15 impulsa 48 l/s de agua del tanque T_1 a los T_3 y T_6 . Calcular la carga H_m de la bomba y el gasto en los tubos 4-5 y 5-6, si la eficiencia de aquéllas es del 70 % y las características físicas de los tubos son las que se indican a continuación

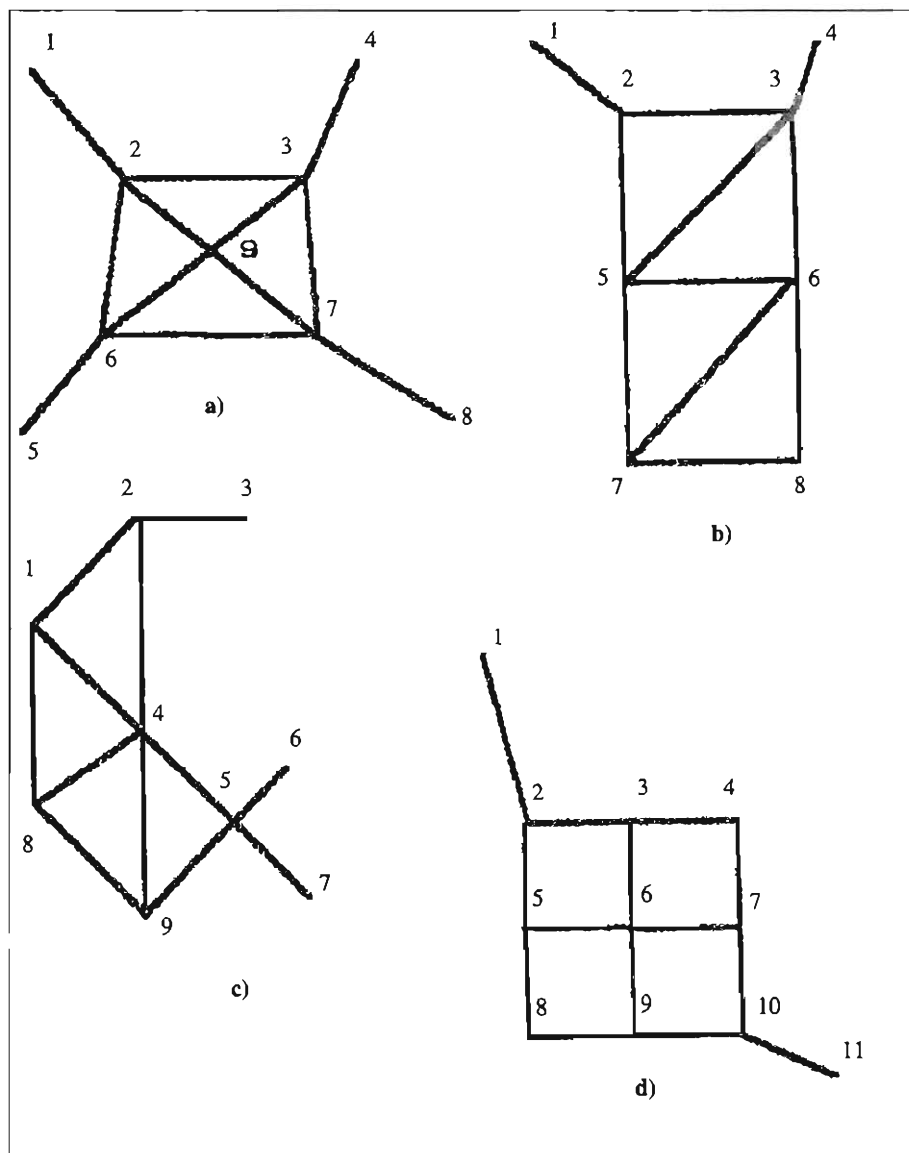


Figura 6.14: Problema propuesto 6.1.

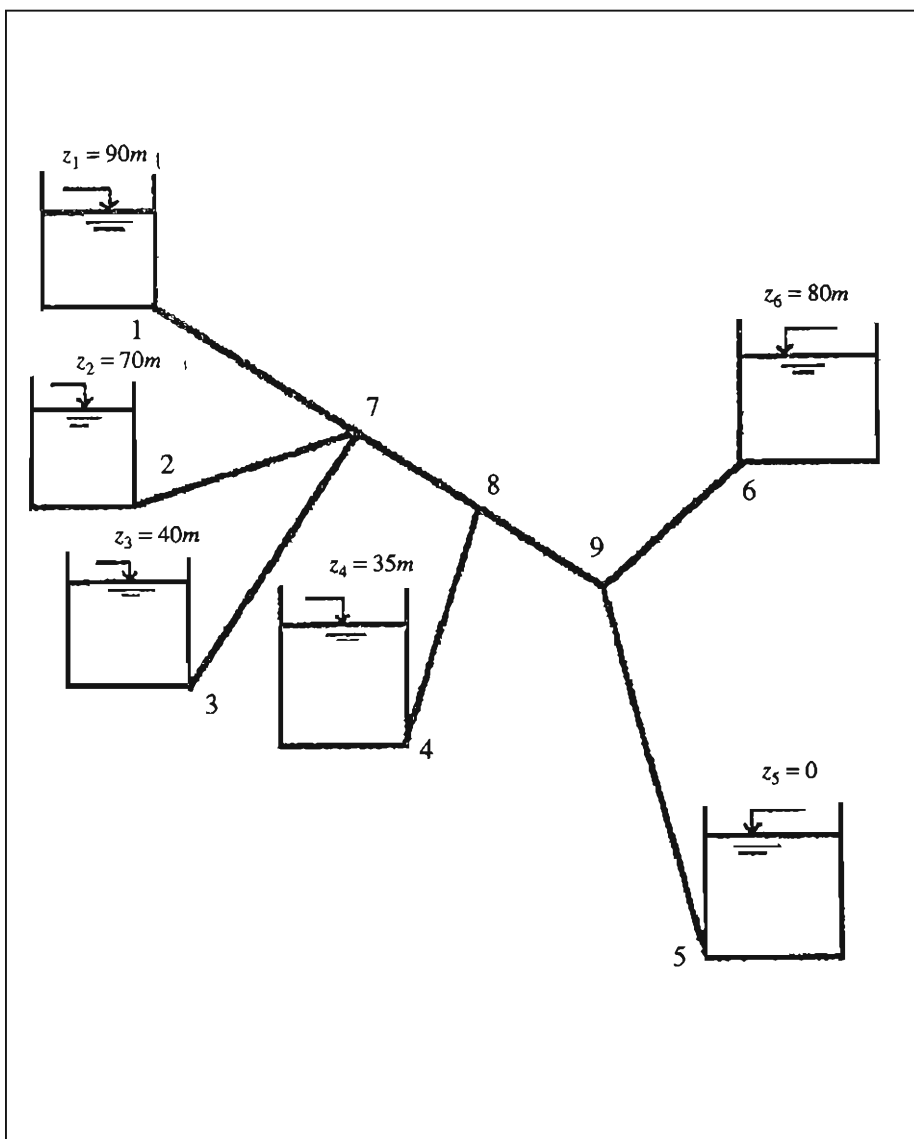


Figura 6.15: Problema propuesto 6.2.

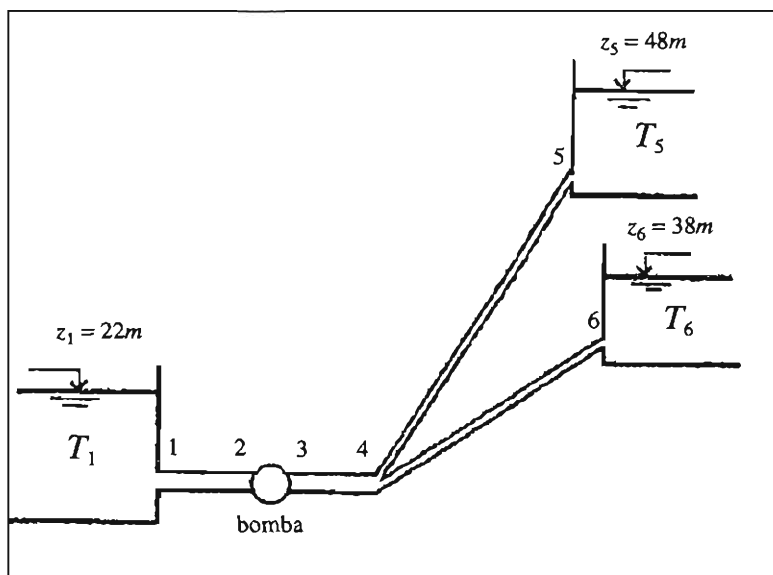


Figura 6.16: Problema propuesto 6.3.

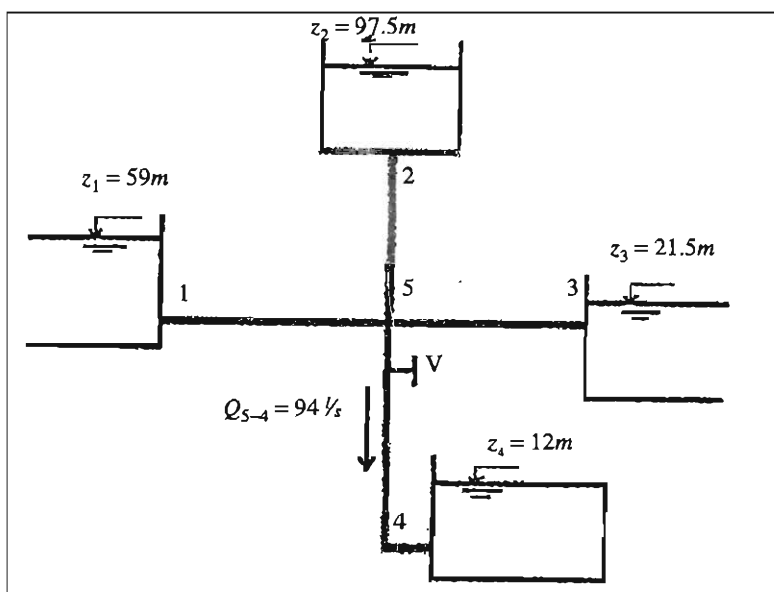


Figura 6.17: Problema propuesto 6.4.

Tramo	diámetro (mm)	longitud de (m) cálculo
1-2	200	10
3-4	200	250
4-5	150	300
4-6	150	300

6.4 La red de la figura 6.17 está formada por 4 tanques cuyas tuberías respectivas convergen en el nudo 5. La válvula V se regula de tal manera que el gasto $Q_{5,4}$ igual a 95 l/s. La tubería es de acero galvanizado nuevo, todos los diámetros son de 250 mm y sus longitudes son: $L_{1,5} = 1.500$ m, $L_{2,5} = 2.200$ m, $L_{3,5} = 2.500$ m y $L_{4,5} = 1.200$ m. Calcular el gasto en los tramos en que se desconoce. Despreciar pérdidas secundarias.

6.5 Para la red de la figura 6.18 se requiere calcular el gasto en la sección 5. La tubería es de PVC y el diámetro es de 250 mm para todos los tubos; las longitudes de cálculo son: $L_{4,3} = 1.400$ m, $L_{2,3} = 1.600$ m, $L_{3,4} = 2.000$ m, $L_{4,5} = 950$ m y $L_{4,3} = 1.350$ m

6.6 La red de la figura 6.19 es calculada por el método de Cross y el resultado del cálculo muestra que el tramo 3-4 contribuye muy poco al funcionamiento del sistema. Probar numéricamente que si se elimina este tramo el gasto en los demás no varía apreciablemente

Tramo	D (mm)	Lc (m)	factor de g fricción	Gasto (calculado por el método de Cross en l/s)
1-2	100	1,150	0.021	12.58
2-3	100	800	0.021	7.36
2-4	100	800	0.021	5.22
3-4	50	800	0.027	-0.81
3-5	100	800	0.021	8.17
4-5	75	800	0.024	4.41
5-6	100	1,150	0.021	12.58

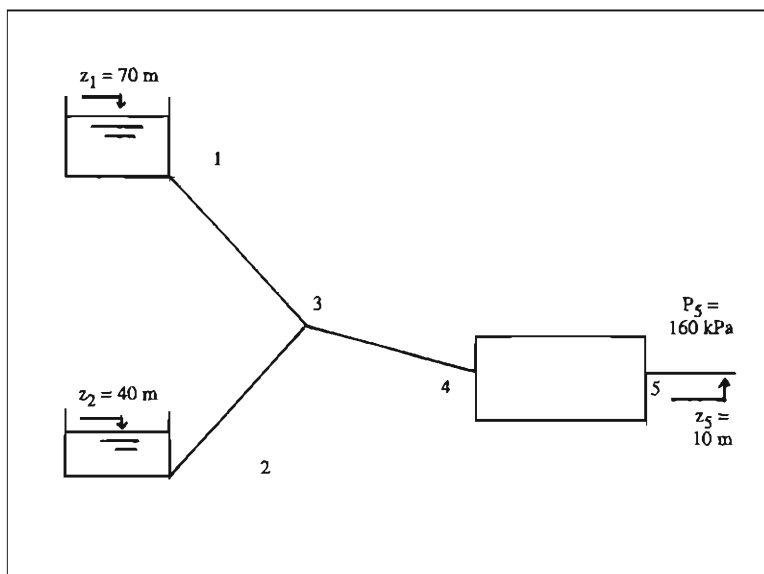


Figura 6.18: Problema propuesto 6.5.

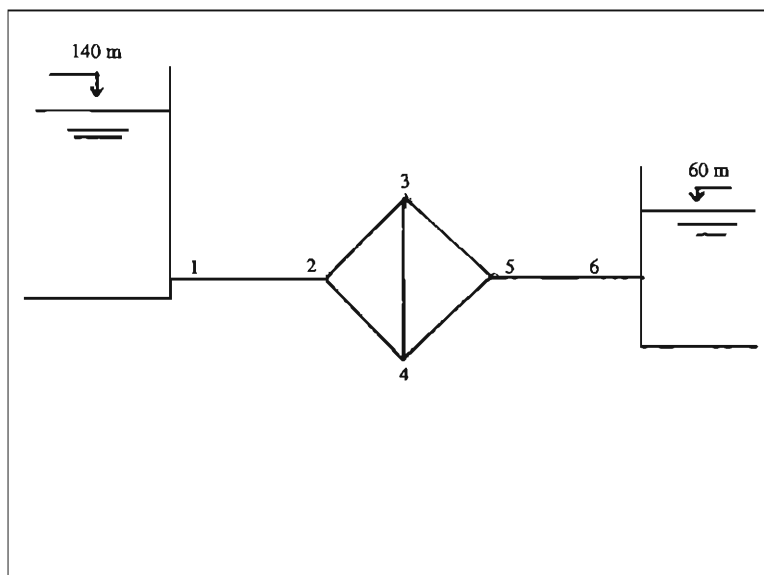


Figura 6.19: Problema propuesto 6.6.

Figura 6.19: Problema propuesto 6.6.

6.7 La red de la figura 6.20 es de acero comercial nuevo y todos los tramos son horizontales; la presión p_1 , en la entrada de la bomba, es de 130 kPa, la carga de la bomba es de 25 m y las descargas 4, 5 y 6 son a la atmósfera, las características físicas de los tramos son las siguientes.

Tramo	diámetro (mm)	longitud (m)	ΣK
2-3	250	100	2
3-4	150	200	4
3-5	150	480	4.5
3-6	200	350	3

6.8 Resolver la red de la figura 6.14.a para los siguientes datos, el material es asbesto-cemento

Nudo i	Q_i (L/s)	H_i (m)
1		85
2	45	
3	30	
4		60
5		30
6	23	
7	15	
8		26
9	12	

Tramo	diámetro (mm)	longitud de (m)
1-2	250	850
2-3	150	450
2-9	100	390
2-6	150	300
3-4	200	650
3-9	100	240
3-7	150	500
6-9	150	550
6-7	150	650
6-5	200	400
9-7	100	330
7-8	200	210

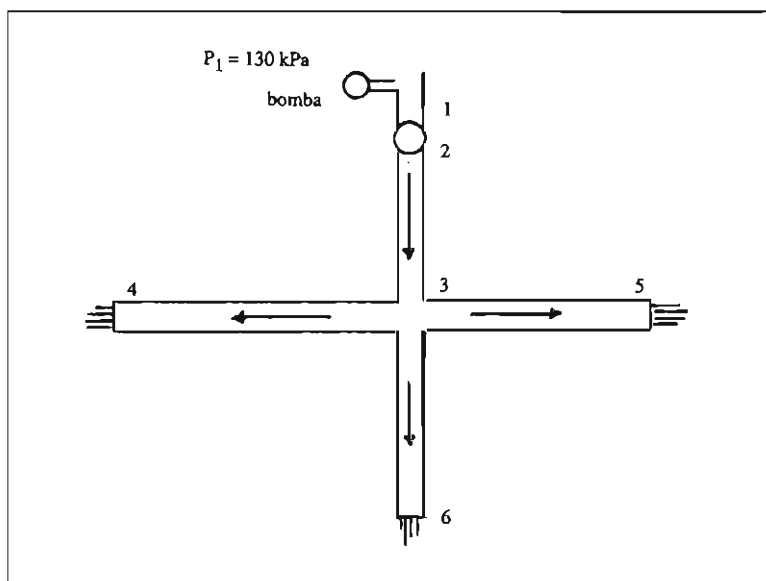


Figura 6. 20: Problema propuesto 6.7.

6.9 Resolver la red de la figura 6.14.b suponiendo que la tubería es de concreto con acabado liso. Los datos son los siguientes:

$$z_1 = z_4 = 130 \text{ m}$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = 250 \text{ l/s}$$

$$D_{1-2} = D_{3-4} = 1 \text{ metro}$$

$$D_{2-3} = D_{2-5} = D_{3-5} = D_{3-6} = d_{5-6} = 600 \text{ mm}$$

$$D_{5-7} = D_{6-7} = D_{6-8} = D_{7-8} = 400 \text{ mm}$$

La longitud de cálculo de todos los tramos es de 900 m.

Referencias

- [1] White. Frank. *Fluid Mechanics*, Ed. Mac. Graw-Hill, New York, 1979
- [2] Streeter. V. y Wylie, B. *Mecánica de los fluidos* 3a. edición en español. Ed. Mac Graw-Hill, México, 1987
- [3] Fox, R.W. y Mc Donald A. T. *Introducción a la mecánica de fluidos*. 2da. edición actualizada. Ed. Interamericana, México, 1983
- [4] Mironer, Alan. *Engineering Fluid Mechanics*. Ed. Mac Graw-Hill. Tokio, 1979
- [5] Daugherty, R. y Franzini, J. *Fluid Mechanics with Engineering Applications*. 7th. edition. Mac Graw-Hill, Tokio, 1981
- [6] Bertin, J. *Mecánica de fluidos para ingenieros*. Ed. Prentice-Hall, México, 1985
- [7] Binder, Raymond - *Fluid Mechanics* - Ed. Prentice-Hall - New Jersey, 1973
- [8] John, J. & Haberman, W. *Introduction to Fluid Mechanics*. Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1971
- [9] Sotelo Avila, Gilberto. *Hidráulica general, tomo I: Fundamentos*. Ed. Limusa, México, 1985
- [10] Prandtl, Ludwig. *The Mechanics of viscous fluids*. Vol III Aerodynamic Theory. Springer, Berlin, 1935
- [11] Karman, Theodor von. *Turbulence*. Journal of the Royal Aeronautic Society, Londres, 1937
- [12] Nikuradse, J. *Stromungsgesetze in rauhen Rohren*. VDI-Forschungshft. Vol. 361. Berlín, 1933
- [13] Rouse, Hunter. *Hidráulica, Mecánica elemental de los fluidos*. Ed. Dossat, Buenos Aires, 1960
- [14] Crane Co. *Flujo de fluidos*. Ed. Mac Graw-Hill, México, 1987
- [15] Rabinovich, E. Z. *Hidráulica*. Ed. Mir, Moscú, 1987
- [16] Hwang, N. & Hita, C. *Fundamentals of Hydraulic Engineering Systems*. 2nd. edition. Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1987
- [17] Moody, L. F. *Friction factors for pipe flow*. Transactions ASME. Vol. 66, pp. 671 a 684. 1944
- [18] Coolebrook, C. F. *Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition between the smooth and rough pipe laws*. Journal of the Institute of Civil Engineering. London. Vol 11, pp. 133 a 156. 1938/1939
- [19] Dalmati, Dante. *Manual de Hidráulica General*. Centro de Estudiantes de Ingeniería de La Plata. La Plata, 1973
- [20] Mataix, Claudio. *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*. Ed. Harla, México, 1982.
- [21] Jones, O. C. *An improvement in the Calculation of Turbulent Friction in Rectangular Ducts*. Journal of Fluids Engineering, June 1976, pp. 173 a 181
- [22] Berker, R. *Handbuch der Physic*. Vol VII, No. 2. Springer-Verlag, Berlin, 1963
- [23] Chen, Hsi-Jen. *An exact solution to the Coolebrook equation*. Chemical Engineering, Feb. 1987, pp. 196 a 198
- [24] Von Bernuth R, and Wilson, T. *Friction factors for small diameter plastic pipes*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol 115, No. 2, feb. 1989, pp. 183 a 191
- [25] Olson, R. M. *Essentials of Engineering Fluid Mechanics*. 2nd. edition. International. Scranton, Pennsylvania, 1965
- [26] Pérez Farrás, Luis. *Rugosidad absoluta del asbesto-cemento*. Suplemento técnico de Eternit Argentina S.A. Buenos Aires, 1985
- [27] Nekrasov. B. *Local features and minor losses*. Hydraulics, Peace publications, Moscú, 1965
- [28] Pérez Farrás, Luis. *Análisis de características de instalaciones de impulsión*. Suplemento técnico de Eternit Argentina S.A. Buenos Aires, 1985
- [29] Debblor, Walter. *Fluid Mechanics Fundamentals*. Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1990
- [30] Lencastre, Arnoldo. *Manuel d'Hydraulique Général*. Ed. Eyrolles, Paris, 1979
- [31] Azevedo, J. M. y Acosta, G. *Manual de Hidráulica*. Ed. Harla, México, 1987
- [32] Silvestre, Paschoal. *Fundamentos de Hidráulica General*. Ed. Limusa, México, 1983
- [33] Fair G., Geyer, J. y Okun, D. *Abastecimiento de agua y remoción de aguas residuales*. Ed. Limusa, México, 1983
- [34] Simon, Andrew. *Hidráulica Básica*. Ed. Limusa, México, 1983
- [35] Hooper, William. *The two-K method predicts head losses in pipe fittings*. Chemical Engineering Journal, Vol. 88 No. 17. Aug. 24, 1981. pp. 96 a 100

- [36] Polo Encinas, Manuel. *Turbomaquinaria*. Ed. Limusa, México, 1983
- [37] Chapra, S. y Canale, R. P. *Método numéricos para ingenieros*. Ed. Mac Graw-Hill, México, 1988
- [38] Gerald, C. *Análisis numérico*. Representaciones y Servicios de Ingeniería. México, 1987
- [39] Cross, H. *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*. Bulletin No. 286, University of Illinois, Engineerign Experimental Station, Urbana, Ill., 1936
- [40] Wood, D. J. & Rayes, A.G. *Reliability of algorythms for pipe network analysis*. Journal of the Hidraulics Division, ASCE, Vol. 107, No. HY10, Oct. 1981, pp. 1145-1161
- [41] Wood, D. & Charles, C.O.A. *Hydraulic network analysis using linear theory*. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol 98, No. HY1, proc. paper 9031, Jul 1972, pp. 1157-1170
- [42] Dupuis, P. Robert, J.L. & Ouellet, Y. *A modified element method for pipe network analysis*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 25, No. 1, 1987, pp. 27-40
- [43] Guaycochea, D.E. y Calderón, J. *Método para el cálculo de tubos a presión en régimen permanente*. 11o. Congreso Nacional de Hráulica, Tomo III, pp. 290-300, Zacatecas, Zac., Octubre de 1990
- [44] Guaycochea, D.E. y Calderón, J. *Paquete computacional: resolvidor de redes de tubos a presión, versión 1.0*. Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, División C. B. I. Reporte de investigación No. 252
- [45] Martin, D. W. y Peters, G. *The application of Newton's method to network analysis by digital computer*. Journal of the Institute of Water Engineers, Vol. 17, 1963, pp. 115-119
- [46] Epp, R. y Fower, A.G. *Efficient code for steady state flows in networks*. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 96, No. HY1, proc. paper 7002, Ene. 1970, pp. 43-46
- [47] Ito, Hidesato, Sato M. y Oka K. *Energy losses due to Division and Combination*. Bulletin of JSME, Vol. 27, No. 232, Octubre de 1984, pp. 2152-2158

Flujo en Tubos a Presión se terminó de imprimir en diciembre de 1992, en Grupo Editorial Eón, S.A. de C.V., Av. México-Coyoacán 421, Colonia Xoco General Anaya, México, D.F. Tels. 604 12 04 y 688 91 12. El tiraje consta de 1000 ejemplares.

UAM
TC180
G8.3

2893853
Guaycochea G., Darío
Flujo en tubos a presión



FLUJO EN TUBOS A PRESION. El conocimiento de los flujos en tubos a presión, reviste especial importancia práctica tanto en áreas como la turbomecánica como para instalaciones industriales y de redes de agua, entre otras aplicaciones.

Fundamentar este conocimiento y desarrollar habilidades para el cálculo de tubos y redes de tubos a presión en regímenes permanentes es el tema central de esta obra.

Si bien muchos de los puntos aquí tratados son expuestos en otros libros, se ha buscado darles un ordenamiento más claro, didáctico y actualizado. Incluye el resultado de trabajos recientes como el método de las dos K para el cálculo de pérdidas por accesorios, fórmulas para el cálculo de longitudes equivalentes y el análisis de los métodos que se sintetizan en la actualidad para el cálculo de redes.

Por su utilidad didáctica, se han incorporado ejemplos relacionados con problemas reales y con materiales y técnicas recientes.

Es una obra, especialmente recomendada para estudiantes de hidráulica y para aquellos estudiantes de ingeniería interesados en la materia.